数学小品译丛

〔美〕R·洪斯贝格尔 著
佩登祥 译

数学瑰宝

第二辑

四川教育出版社

SHU XUE XIAO PIN YI CONG

数学小品译丛

数学瑰宝

第二辑

〔美〕R.洪斯贝格尔 著

伍登祥 译

四川教育出版社

一九八八年·成都

责任编辑：韩承训

封面设计：文小华

版面设计：顾求实

数学瑰宝 （第二辑） 数学小品译丛

四川教育出版社出版发行 （成都盐道街三号）
四川省新华书店经销 绵阳新华印刷厂印刷

开本787×960毫米1/32 印张9.375 插页2 字数156千
1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷
印数：1—1345册

ISBN7—5408—0035—6/G·36 定价：3.12元

作者为中译本写的附言

获悉《多尔恰尼丛书》中我的四卷《数学瑰宝》由译者译成中文，这实在是非常意外的事情。我为本书有了中译本殊感荣幸，欣然写出下面的简短附言，作为译本的开场白（不是用来代替本书原有的序言）。

译者希望把本书介绍给中国读者，我为此感到非常荣幸，相当初等的数学中有多少动人心弦的东西，这是值得注意的事情。这个译本里也寄托着我殷切的希望：愿读者将能揭示出数学中许多可喜的新东西。

洪斯贝格尔

1983.4.18

前　言

美国数学协会的《多尔恰尼数学介绍性著作》丛书，是因机缘巧合而问世的。

纽约市立大学亨特学院多尔恰尼（Mary P. Dolciani）教授，本人是一位才华出众、工作热情的教师和作者，她一直在追求数学讲解工作中理想的上乘境界。

与此同时，协会已经获得本书的手稿，这是一卷短文集子，似乎并不完全适宜于收入协会现有的任何丛书，但是手稿内容引人入胜，文风清新，显然是值得出版的。

后来，水到渠成，多尔恰尼教授决定设立一笔周转资金来创办这套《数学介绍性著作》丛书，藉以实现她的目的。

本丛书的选题既要求清新的口语风格，也要求引人入胜的数学内容。预期，各卷都有丰富的习题，很多卷还附有解答。因此，这套丛书将能提供有价值的丰富材料，尤其是综述性课题的材料，我们设想，这套丛书是有数学才能的中学生可以看懂的，但水平更高的数学工作者也不能对此掉以轻

心。

美国数学协会当然乐于接受多尔恰尼教授设置这套丛书的慷慨馈赠。她既是协会出版委员会的委员，又是管理委员会的委员，为协会服务，成绩斐然。管理委员会真诚愉快地决定将这套丛书冠以她的名字，以示敬意。

美国数学协会出版委员会主席

贝肯巴赫

(Edwin F.Beckenbach)

序　言

数学里的美妙思想真是多，无论你多么艰辛多么持久地挖掘，数学中令人心花怒放的宝物好象永远也掘不尽挖不完似的。不仅在高级的深奥著作中这些瑰宝才耀眼夺目，就是在那些简单的题材中也显示出鬼斧神工，匠心独运。这册书讲了好几十个初等问题，主要是从1894年到1975年的美国数学月刊里收集来的。这些问题中包含了几十条巧妙构思，其中有二十来条真是令人赏心悦目，美极了。

保尔·厄尔迪什（Paul Erdos）兴了这么一种说法，就是上帝手头有一本书，所有的数学定理和它们的最漂亮的证明都在里面，每当他想赞赏某个定理时，他就说“这个定理是上帝那本书里的！”这里也许可以这么说，本书是从下述观点出发写成的：人生的一切财富都是上帝赐予的，我们应当怀着感恩的心情愉快地收下这份礼物。为了上帝的光荣，为了得到上帝的赞许，我们应分享这份礼物。

具有大学一年级的数学知识就足以读懂这册书的大部分内容了。偶尔也讲到别的内容，即使这

样，所讲的东西也几乎总是初等的。这些内容由于现在的课程表安得太满而无法插进去，不得不延迟到后期才讲。我指的就是匹克(Pick)定理和圆反演的基本理论。如果你没有学过这些知识也不必害怕，因为需要用到它们时，很快就可以学懂的。有关的参考内容在本书正文中要讲到。

本书所讲的大部分问题都曾在著名的数学杂志的问题栏中登载过。每个问题的开头我们都指出来源、提问人、解答人①。在问题流传过程中这些线索逐渐模糊甚至中断了，所以在说某个问题是某个人提出的，或者说某问题是某人解答的时候，或多或少是冒了一点风险说的。写出参考来源主要是指明我碰巧见到这个问题的地方。指明下面一点对有关人士是公平的：我常常只采用了一个问题或解答的某一部分，而且一般来说我都把表述方式完全改写或大大地美化了。对很多问题的叙述方式进行修改，目的是想让它更引人注意。这不是一本出题让你做的书（尽管你先做一下题定会得到更大的乐趣），而是数学奇迹的小橱窗。不过在书末我们还是出了几十道练习题给大家做。

为了帮助读者查找某个具体问题或追溯某个感兴趣的题目，我们把全部问题归成下面三大类附于

①在译文中略去——译者注。

书末：

（Ⅰ）代数，算术，数论，数列，概率。

（Ⅱ）组合论，组合几何（极大与极小）。

（Ⅲ）几何（极大与极小）

在参考文献中用了下列缩写符号：

AMM——美国数学月刊；

MM——数学杂志；

NMM——国家数学杂志(数学杂志的前身)。

我很感谢伊凡·尼文教授，他仔细审阅了手稿，使我能作出许多更正和改进。也感谢我的同事列罗衣·迪基，E.F.贝肯巴赫教授，亨利·阿尔德，雷夫·波阿斯，唐纳·阿尔伯斯，G.L.亚历山大逊，因为他们提出了许多建设性的批评。

罗斯·洪斯贝格尔

目　录

一、象棋比赛

假设纽约市的象棋大师比美国其他地方合起来的还多．计划举办一次象棋比赛，全美象棋大师都参加．经商定，举行比赛的地点应当设在使参赛的人走的路程最短的地方．纽约的棋手说，根据这条标准，棋赛地点应选在纽约市．西海岸的棋手们却争辩说，选在参加棋赛的棋手们的重心所在地或其附近更好些．问棋赛究竟该选在何处举行？

解答 纽约棋手的意见是正确的！用N_1，$N_2\cdots$，N_k表示纽约的棋手，其他棋手为O_1，O_2，$\cdots O_t$．因纽约棋手数目过半，故有$k>t$．把棋手们一一配成对(N_1, O_1)，(N_2, O_2)，$\cdots$，(N_t, O_t)后，纽约大师N_{t+1}，N_{t+2}，$\cdots$，N_k不包含在内。

现在来考虑(N_1, O_1)．无论比赛在哪里举行，棋手N_1与O_1必须走的路程之和至少是"N_1O_1"（他们所在的两个城市间的直线距离）．于是，全体棋手走的总路程至少是

$$S=N_1O_1+N_2O_2+\cdots+N_tO_t.$$

如果在纽约比赛，S就是最短路程．如果比赛在别处举行，那么，t 对棋手至少必须走一段路程S，而棋手N_{t+1}，N_{t+2}，…，N_k所走路程不再是零，从而增长了总路程．因此，纽约是最佳比赛地点．

J.H.布恰（Butchart）与里奥·毛塞（Leo Moser）在《数学文稿》（Scripta Mathematica），1952，221—236页上写过一篇精彩的文章《请勿使用微积分》（No Calculus Please），考虑了一个类似的问题：

在直线上依次给出了n个点：x_1，x_2，…，x_n；试在此直线上求出一点x，使得它与直线上已给各点的距离之和S最小（图1）．



图 1

显然，x_1x与x_nx之和至少必须是x_1x_n．现在"从外向内"将各点配成对，作成区间套（x_1，x_n），（x_2，x_{n-1}），…．如果n是奇数，则点$x_{(n+1)/2}$打单．由于各配对点距离之和在它们之间的任意一点x处达到最小，最内的区间中的一点x使各对之距离同时达到最小值，所以，当n为偶数时，

$$S \geqslant x_1x_n + x_2x_{n-1} + \cdots,$$

无论x在最内区间中的何处，均取等号．当n为奇

数时，将 x 取成（属于最内的区间中的）已知点 $x_{(n+1)/2}$ 即可得到同样的最小值，此时，距离 $x\ x_{(n+1)/2}$ 等于零。

二、n的有序分解

数3可以用四种方法（要考虑项的次序）表成一个或几个自然数之和：

$$3,\ 1+2,\ 2+1,\ 1+1+1.$$

问数n有多少个这种表示法？

解答 考虑排成一列的n个1．用个数不超过$n-1$的插子插在n个1之间的$n-1$个空格内，这样得到的任一排列都与n的一个表示法相对应，反之亦然．例如

$$1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ |\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ \cdots 1\ 1$$

$$n=2+3+1+n-6$$

因为在$n-1$个空格的每一个中，既可以插入一个插子，也可以不插，所以共有2^{n-1}个插入插子的方法，因而n就有2^{n-1}种表示法．

三、圆内的区域

在圆周上取n个点，作弦将它们连接起来，设此圆内任何三条弦都不共点．问此圆内部可分成多少个区域？

解答 假设诸弦是一条一条地依次画进图中的．一条新弦穿过已有的各个区域便增加了割出的区域的个数（图2）．新增加的区域数等于与新弦相交的各弦把新弦分成的段数，这个数比新弦上的交点数多一．于是我们轻而易举地便可以证明一个著

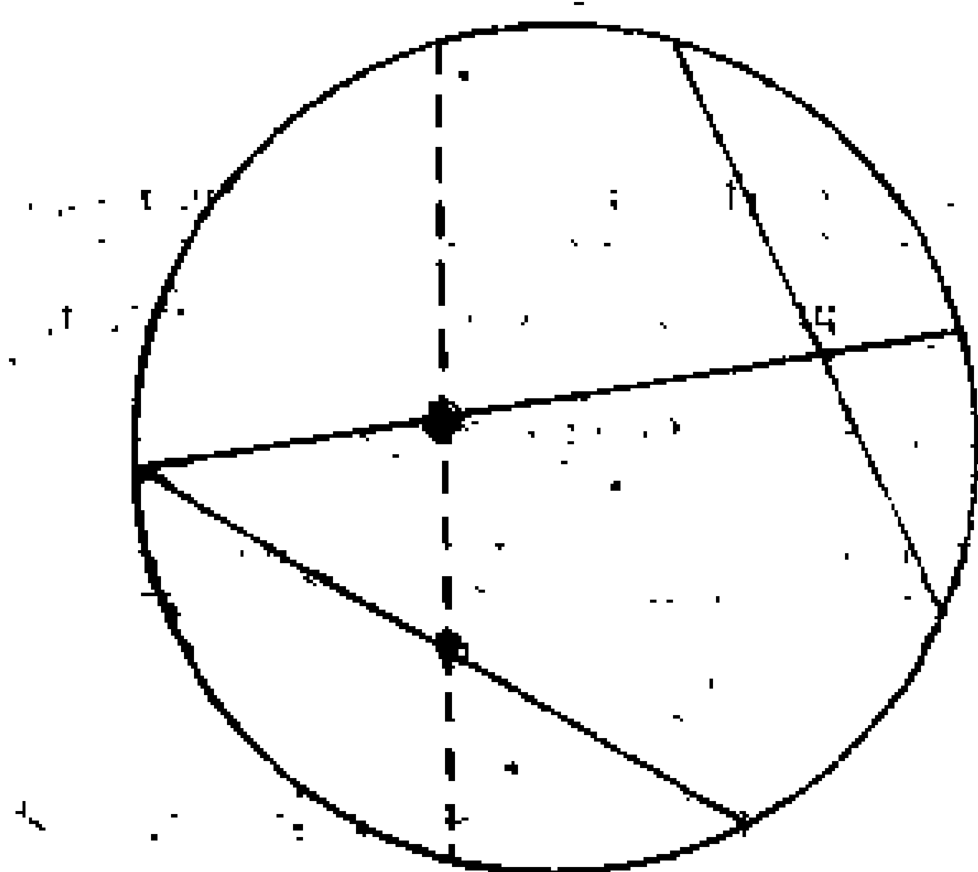


图 2

名的公式：设圆内L条弦中任意三条都不共点，在圆内总共有交点P个，则这L条弦把圆分成$P+L+1$个区域.

$L=1$时，$P+L+1=0+1+1=2$（图3）. 若添加的一条弦与第一条相交，则

$$P+L+1=1+2+1=4,$$

若不与第一条相交，则

$$P+L+1=0+2+1=3.$$

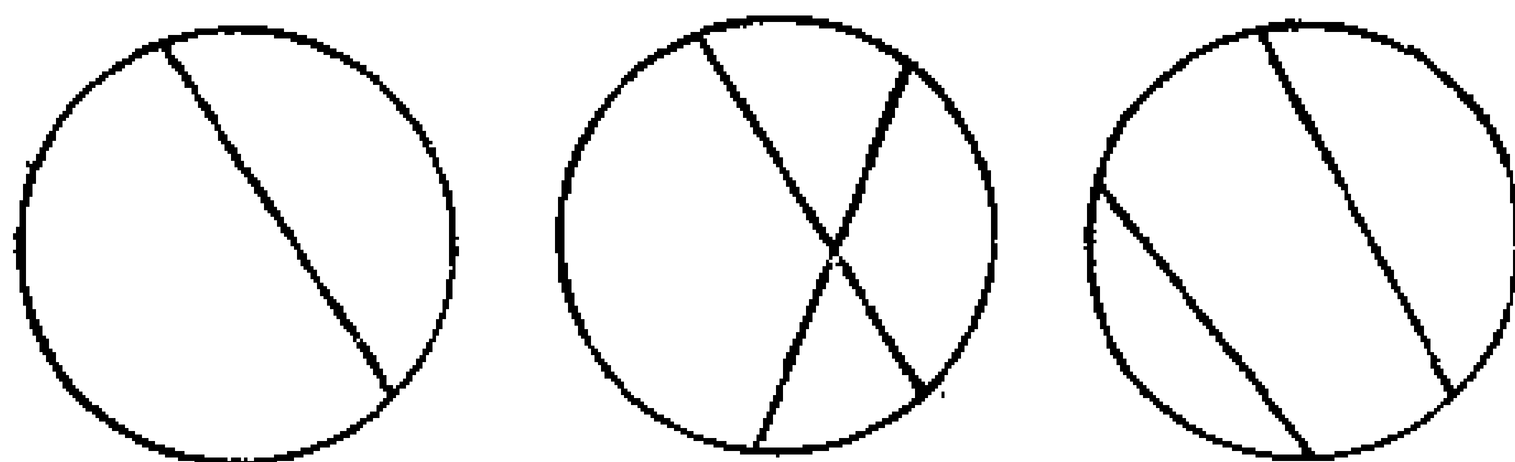


图 3

现在用归纳法证明这个公式. 设$L\geqslant 2$时公式成立. 新添一条弦后假定增加了k个新交点. 此新弦与其它k条弦相交时必穿越$k+1$个区域，于是区域总数便增加$k+1$. 因此，在$L+1$条弦与$P+k$个交点的情形，区域总块数为

$$(R+L+1)+(k+1)=(P+k)+(L+1)+1,$$

这就通过归纳法确立了上述公式.

一个交点X与圆周上已知n个点中的四字组

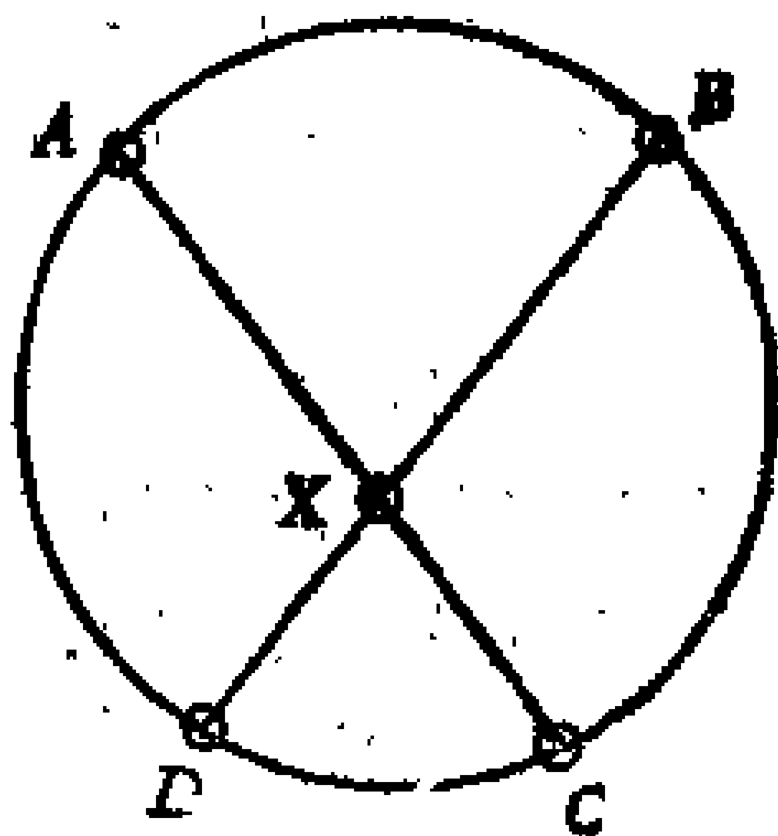


图 4

(A, B, C, D) 之间显然有一一对应关系(图4)，因此交点数目也就是四字组的组数 C_n^4.因为共有 C_n^2 条弦，所以n个点两两相连构成的区域数是

$$P+L+1=C_n^4+C_n^2+1.$$

(注意，上述结果对于平面上的任何凸区域也是成立的，这个方法可以推广到高维情况.一个点集S称为凸集，如果S中任意两点A与B连成的线段AB完全含在S内.关于凸集的详细情况，请看罗素·V·本森 (Russell V.Benson)：欧几里德几何与凸性 (Euclidean Geometry and Convexity)，McGraw—Hill，1966).

还可以更巧妙地推算出区域数目，方法是一条条地抹去所有的弦，我们来考虑每抹去一条弦，区域数目减少的个数.每条弦隔开两个区域，弦一

抹掉，两个区域便合二为一了.因此减少的区域数比弦上交点数多一.但每个交点位于两条弦上，无论抹去哪一条弦，交点同时也从另一条弦上消失了，因之，在整个抹线操作中，每个交点只算一次，对每条弦来说减少的区域数就是

（弦上留下的交点数）+1.

把全部L条弦抹去，我们便看出减少的区域总数包括全部交点个数P，再加上每条弦对应的一个，也就是说总共减少了$P+L$个区域.因为全部弦抹完之后圆的内部仍旧存在，所以最初（抹之前）必有$P+L+1$个区域.

四、渡船

两条渡船以常速度在一条河上往返行驶，一靠岸便立即掉头往回开．这两条船同时抵达对岸，在离一条岸 700 英尺处首次相遇，然后继续向岸边开去，掉头后在离对岸400英尺处第二次相逢．试口答河的宽度是多少英尺．

解答 两只船第一次相遇时所走路程之和恰好是河的宽度（图5）．大家可能会觉得奇怪，两船第

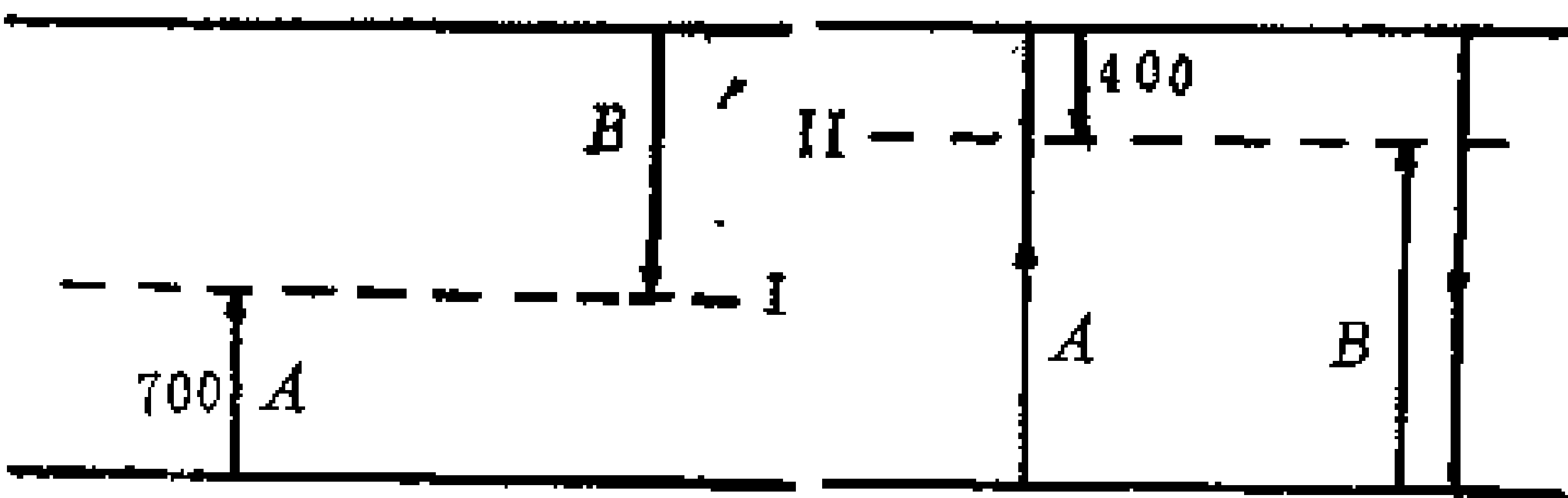


图 5

二次相遇时，它们走过的总路程竟是河宽的三倍．由于航速是常数，再次相会的时间是首次相会时间的三倍．首次相会时，渡船 A 已走了 700 英尺，三倍长时间之后它就走了2100英尺．但再次相会时 A

已走过一趟不往回走的400英尺，因此河宽就该是 2100－400＝1700英尺.

五、鼓半圆

在以O为圆心，1为半径的圆的弦AB上向外面画一个半圆.显然，半圆周上鼓出得最远的点C在垂直于AB的半径延长线ODC上（图6）.（对于半圆周上的另外的C'来说，我们有$OC'<OD+DC'=OD+DC=OC$）.当然OC的长度随着弦AB的不同选取而变化.试确定AB，使得OC最长.

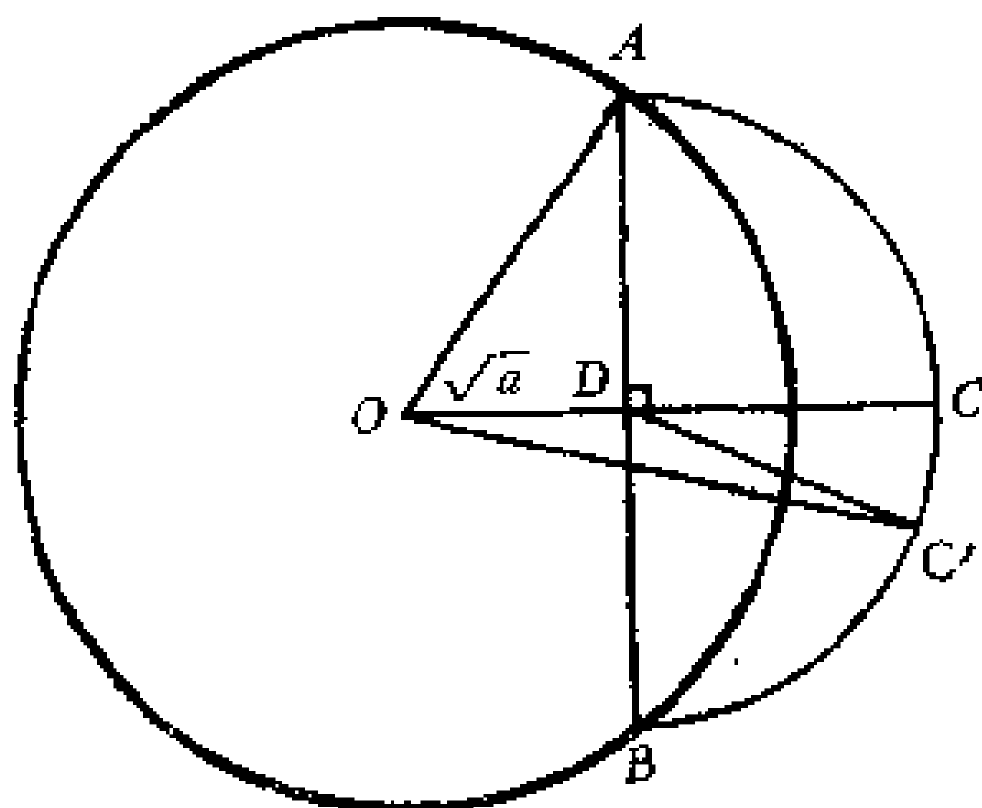


图　6

解答　令$OD=\sqrt{a}$，则半圆的半径为

$$AD=\sqrt{1-a}=DC.$$

故$OC^2=(OD+DC)^2=(\sqrt{a}+\sqrt{1-a})^2=a+$

$2\sqrt{a(1-a)}+1-a$，即$OC^2=1+2\sqrt{a(1-a)}$．要求OC极大，必须$a(1-a)$为极大．由于

$$a(1-a)=a-a^2=\frac{1}{4}-(a-\frac{1}{2})^2$$

在$a=\frac{1}{2}$时有极大值，故$OD=\sqrt{a}=\sqrt{2}/2$．

请注意，OC为极大时，

$$AD=\sqrt{1-OD^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}/2,$$

故得$AB=2AD=\sqrt{2}$．于是$\triangle AOB$的三边各为1，1，$\sqrt{2}$，这表明弦AB所对的圆心角为直角．

下面再介绍一个很巧妙的解法．$\triangle ADC$是等腰直角三角形，$\angle DCA=45°$（图7）．如果CA不与已知圆相切，就会有一条弦使得C点在OD延线的更远

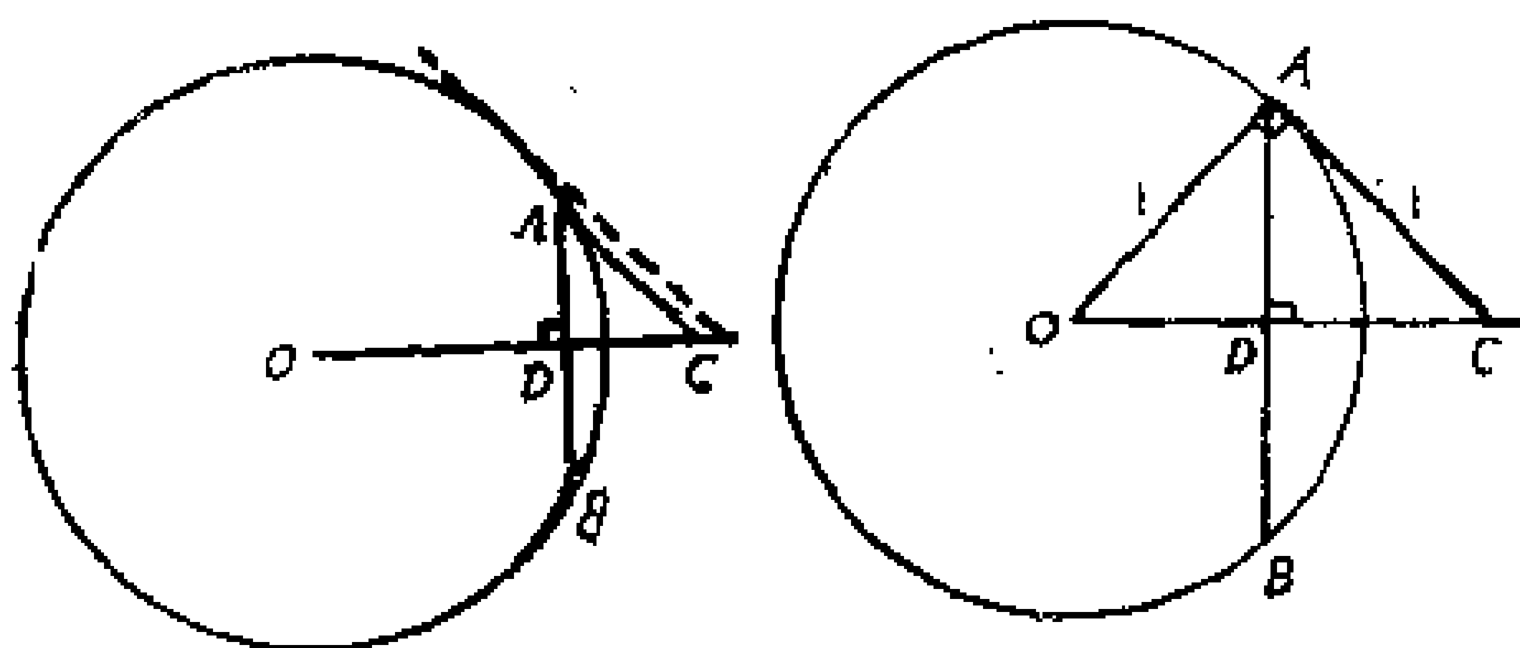


图　7

端．因此使OC为极大的弦必定使CA成为切线，这样CA也就是等腰直角三角形OAC的直角边．因而$CA=OA=1$，于是因DAC为等腰直角三角形，我

们便得到

$$AD=\sqrt{2}/2, \qquad AB=\sqrt{2}.$$

六、司机问题

司密斯先生持有火车月票，每天五点正有司机在火车站接他回家．有一天他没有打招呼就乘四点的火车到了，只得步行回家．走了一阵便碰上驱车前往火车站接他的司机，于是坐上车，比平时早20分钟到了家．

另外一天，司密斯先生又没打招呼就坐四点半的火车到了，步行回家.在途中碰上司机，剩下的一段路又由司机载他．问这一次他们比平时提前多少时间到家？（假定步行与汽车的速度都固定不变，并且汽车掉头与搭司密斯先生上车都不消耗时间.）

解法一　这个问题通常都是这样解决的：第一次司机省了20分钟的开车时间．因此肯定是在离火车站10分钟（单程）路程的地方接到司密斯先生的．要是象平时一样，司机会在五点正到达车站．省了10分钟就意味着他一定是在4:50分接到司密斯的．因此司密斯先生用50分钟步行的路程，开车用10分钟便走完了.由此可知，司机的速度比司密斯先生

快五倍.

现在假设第二次司密斯步行了$5t$分钟，那么，他所走的路程司机只用t分钟便走完了.因此，这一次是在五点前t分钟，即四点后$60-t$分钟接到司密斯的.然而司密斯是4:30分开步走的，共走了$5t$分钟，所以是在四点后$30+5t$分钟被接到的.于是$30+5t=60-t$，即$t=5$.这样，司机(按单程算)少走了五分钟，因此这次提前十分钟到家.

上述解法是很巧妙的.然而在我们举行的新生竞赛中，有一个叫理查德·卡麦隆的学生（安大略省彼得伯勒）即席提出了下面的解法.

解法二 假定以"离车站的距离"与"时间"为纵、横坐标作图，便容易看出司密斯与司机的走动情况.比如在正常情形，每天的走动情况如下：从四点开始算（图8）（这是所谓的"世界线图

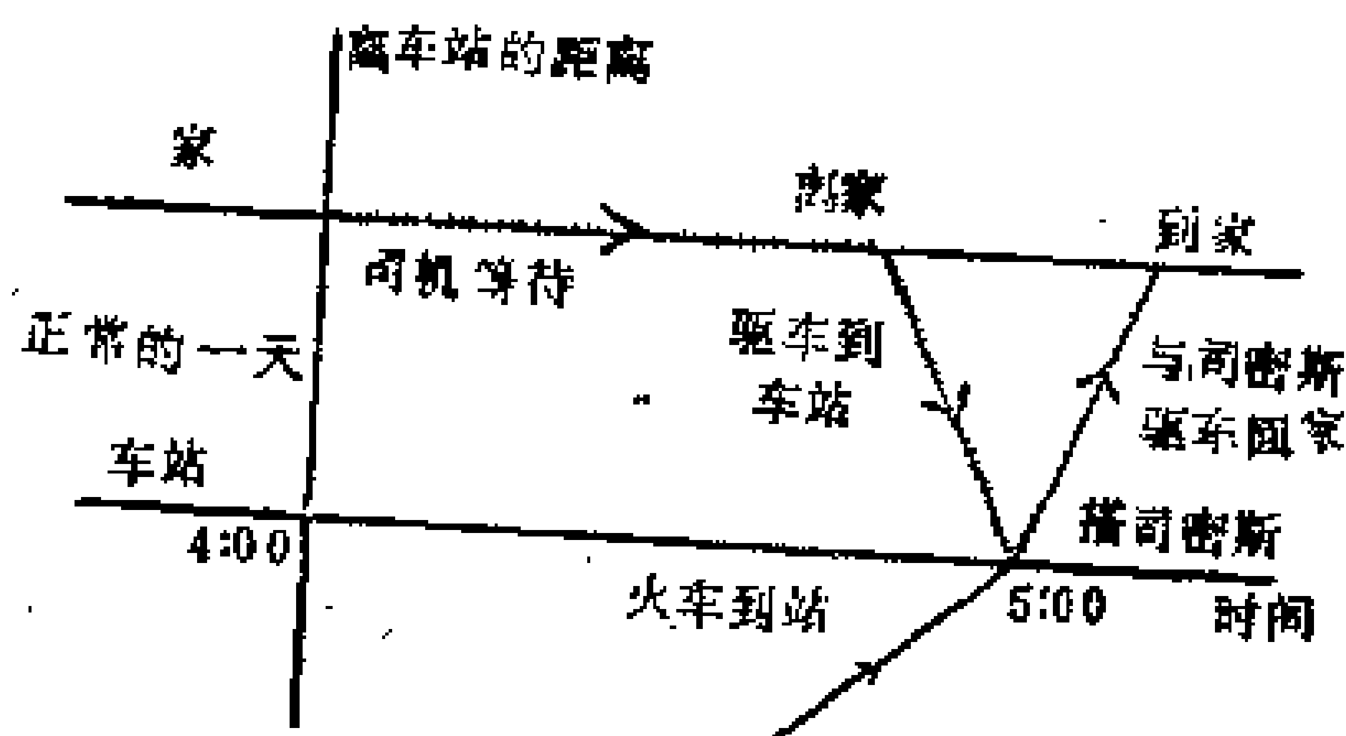


图 8

”，不过卡麦隆从未听说过这个名称）．

包括平常走法在内的三种走法都图解在图9中．因为步行与乘汽车都是常速度，所以三条世界线都分段平行．又因为4:30平分四点与五点之间的时间，所以按比例1:1分成两部分被平行线传递下去，得出第二次节省的时间为$\frac{1}{2}\times 20=10$分钟．

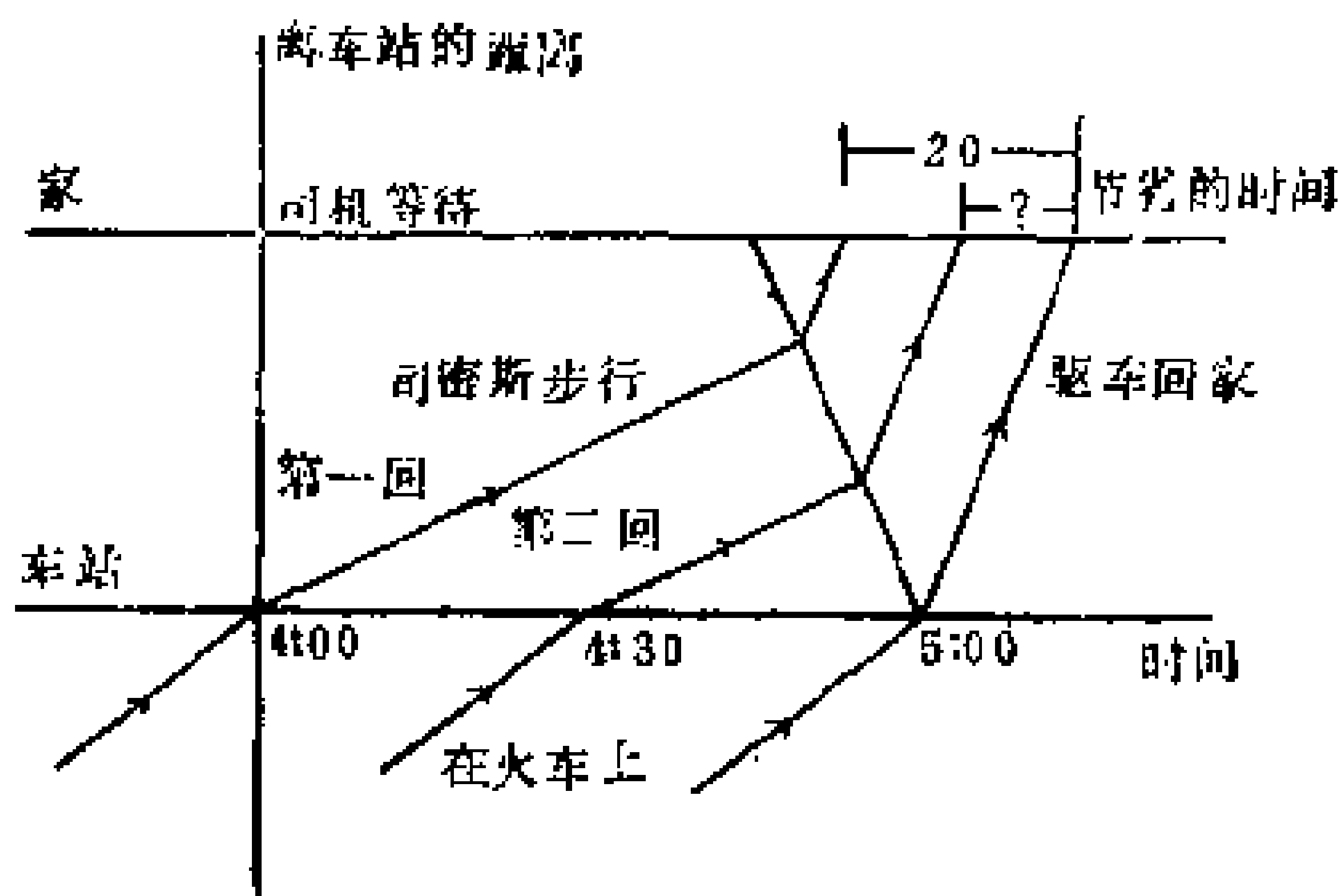


图 9

七、屋角的帘子

在一间矩形房间的一角挂两幅4英尺长的帘子，使其所围的地面最大，试确定帘子的悬挂位置．

解答 解决这个问题要反复应用下面的有名引理．

引理 底边相等、底边所对顶角相等的三角形中面积最大的三角形是等腰三角形〔显然，所有这些三角形都可以安放在圆的弓形中，这些具有公共底边的三角形中只有等腰三角形的高最长（图10）．〕

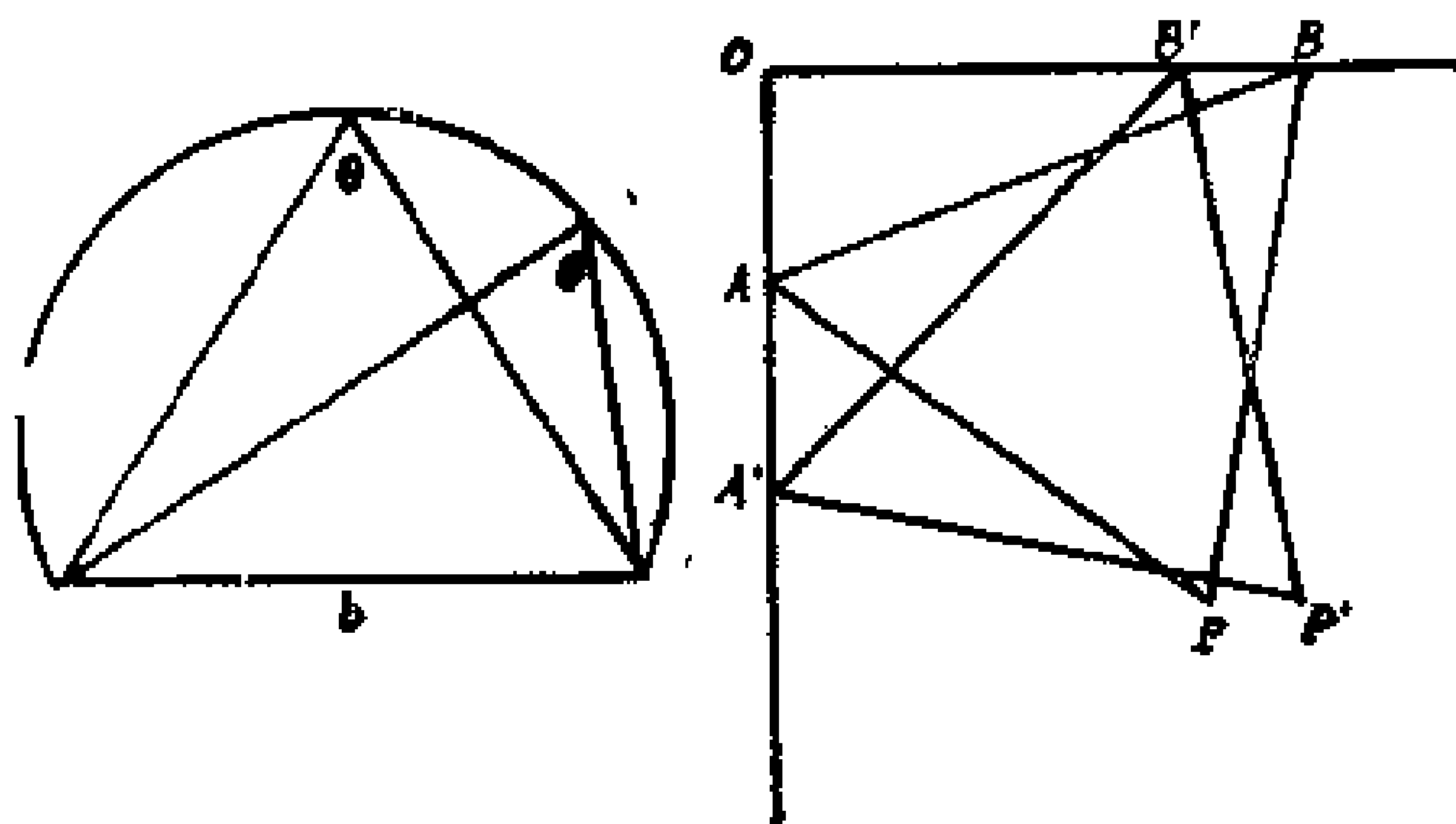


图 10

令O表示房间的屋角，并设A、B是帘子与墙接触处. 于是所围成的地面面积为 $\triangle AOB+\triangle ABP$，这里$P$是两幅帘子的接头处（显然帘子要在端部接头才能保证围出最大区域，因此P就是公共端点）.

假设$\triangle OAB$不是$OA=OB$的等腰三角形，就可以将帘子移到位置$A'P'$与$B'P'$，使得$OA'=OB'$，而$A'B'$仍然等于AB. 于是$\triangle A'B'P'$与$\triangle ABP$就相等（事实上全等），而且根据引理，$\triangle OA'B'$大于$\triangle OAB$，即新位置上面积大些. 因此，确保包围面积最大的挂法必须是让$OA=OB$.

帘子长度相等，故点P永远在AB的中垂线上. $OA=OB$时，AB的中垂线就要平分屋角O处的直角. 因此要得最大面积，OP必须平分$\angle O$（图11），

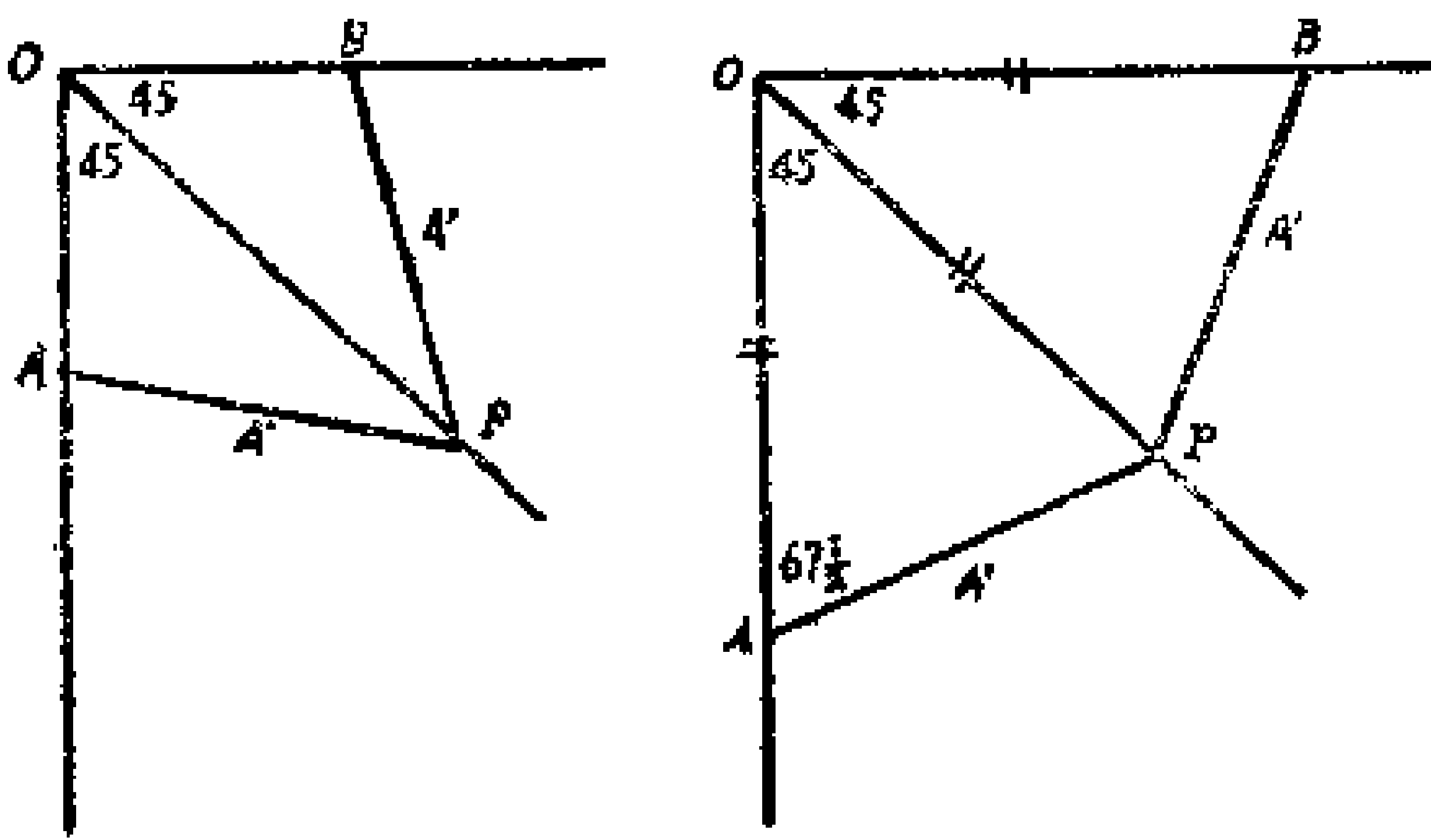


图 11

从而每幅帘子在O处要对一个45°角，并围成一个面积最大的三角形（否则必有更好的围法）. 因为

AP是常数，故由引理知，当OAP为等腰三角形且$OA=OP$时$\triangle OAP$最大.这时，$\angle OAP=67\frac{1}{2}$，问题就解答的很明白了. 至于用直尺、圆规画出AP的事，留作练习好了.

在后面的问题（二十五，请勿使用微积分）中有这个问题的一个很巧妙的解法。

八、给平面着色

假设平面上的每个点都涂成红色或蓝色．试证明有一个矩形的全部顶点颜色相同．

解答 任意七个点的集合必定至少包含四个颜色相同的点，于是在一条直线上的七个点中一定有四个共线的点P_1、P_2、P_3、P_4颜色一样，比如都是红色．如果将这四点投影到与第一条线平行的另外两条线上，就得到两个共线的四点组（Q_1，Q_2，Q_3，Q_4）与（R_1，R_2，R_3，R_4），它们在自己之间确定出几个矩形，并与P_i确定出另外几个矩形．要是任意两个Q都是红色，就可以得到一个（顶点）全红的矩形P_i P_j Q_j Q_i．对任意两个R都是红色的情形类似．如果上述两种情形一个也不发生，那么，某三个（或更多的）Q、

P_1 .	Q_1 .	R_1 .
P_2 .	Q_2 .	R_2 .
P_3 .	Q_3 .	R_3 .
P_4 .	Q_4 .	R_4 .

某三个（或更多的）R必是蓝色，但是这些蓝色的

三点组不可避免地会排列成每个三点组有一对点与另一组的一对点相对，从而形成一个（顶点）全蓝的矩形。于是得出要求的结论。

注意，这个结果对于平面上任何一个包含（无论多么小的）某个圆内全部点的区域都对．一个实质上与这个问题相同的题目曾出现在1976年春季第五届美国数学奥林匹克竞赛中。

九、一个显然的极大值

设P是弦AB割出的圆弧AB上的一个动点. 当P在弧AB的中点时，弦AP与PB之和为最大，这条性质在直观上是显然的，试证之.

解答 以AB弧的中点O为圆心过A与B作第二条弧. 设AP、AO与新作的弧分别交于Q点与C点（图12）.

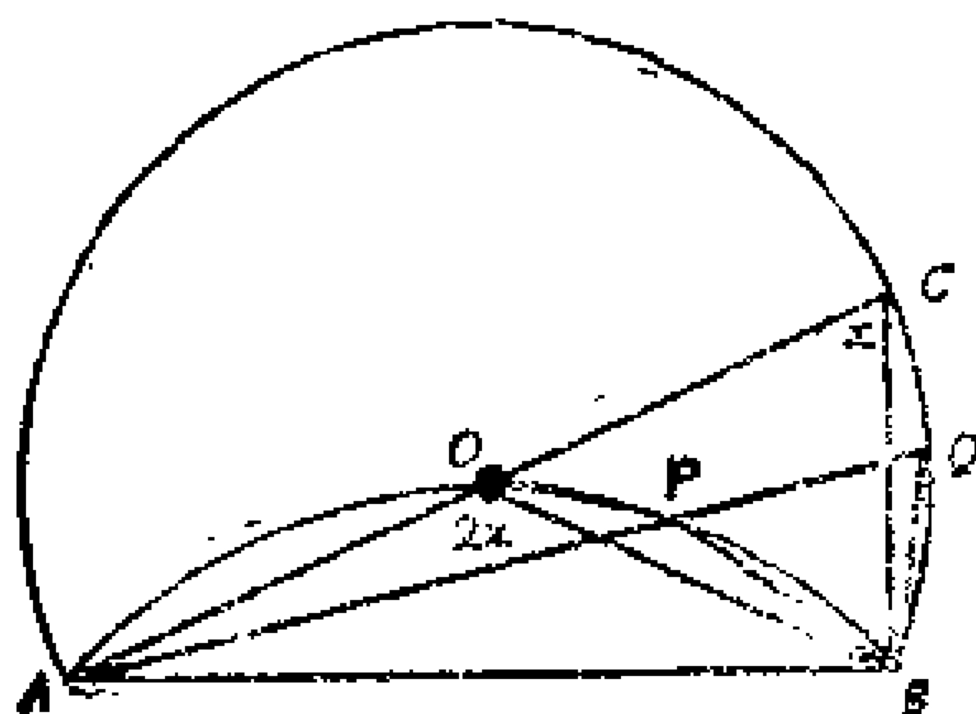


图 12

弦AB在圆心O处所对的角是它在圆周上C点处所对角的二倍，但弦AB在P处所对的角与在O处所对的角相等，在Q处与在C处所对的角相等. 于是

$$\angle APB = 2\angle Q.$$

但从$\triangle PQB$来看，外角APB是Q与B两处内角之和，因此

$$2\angle Q=\angle Q+\angle QBP,$$

$$\angle Q=\angle QBP.$$

于是，$\triangle PQB$是等腰三角形，$AP+PB=AP+PQ=AQ$（外圆弧上的一条弦）．很明显，当这条弦是直径时，即P在O处时，它就最长．

注意，对于以A、B为焦点的一族不断扩展的椭圆作动态考察也可以得到本题的结果．由于对称的缘故，椭圆与圆弧的最后一个切点是在圆弧的中点．作最后接触的椭圆是与圆弧相接触的最大一个椭圆，因之焦半径之和也最大，这便是所求的结论．

十、$\cos 17x=f(\cos x)$

若f是用$\cos x$来表示$\cos 17x$的函数，即

$$\cos 17x=f(\cos x),$$

试证明用$\sin x$表示 $\sin 17x$ 的也是这同一个函数，即

$$\sin 17x=f(\sin x).$$

解答 令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则 $\sin x=\cos y$，

$$\begin{aligned}\sin 17x&=\sin\left[17\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]\\&=\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}-17y\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-17y\right)=\cos 17y\\&=f(\cos y)=f(\sin x).\end{aligned}$$

请注意，题中的17可以换成形如$4k+1$ 的任何整数。

十一、正方形内的格点

在坐标平面上$n\times n$的正方形S包含$(n+1)^2$个格点（坐标x，y均为整数的点(x,y)），如果S的顶点都是格点，且各边都平行于格子线（轴）．试证明一个非常直观的结论：无论把S怎样摆在平面上，它含有的格点绝不可能多于$(n+1)^2$个．

解答 现在考虑S处在平面中的任意位置．假设S的边界是橡皮带，平面上每个格点都钉了一颗钉子．只要橡皮带可以收缩就让它收缩，使得它围在S所覆盖的格点处的钉子外边．橡皮带所围成的多边形H叫S的格点的"凸包"，凸包是几何学许多研究中极其重要的一个概念(图13)，如果S的每个顶点都正好落在一个格点上，那么H就是S自身．(关于凸包定义的更多评述，请看后面的注记.)

因为H含于S内，其面积不会超过S的面积：

$$H\text{的面积}\leqslant n^2.$$

1899年，乔治·匹克（George Pick）发现了一个十分重要的公式，可以计算顶点是格点，且自身不交叉的多边形Y的面积：

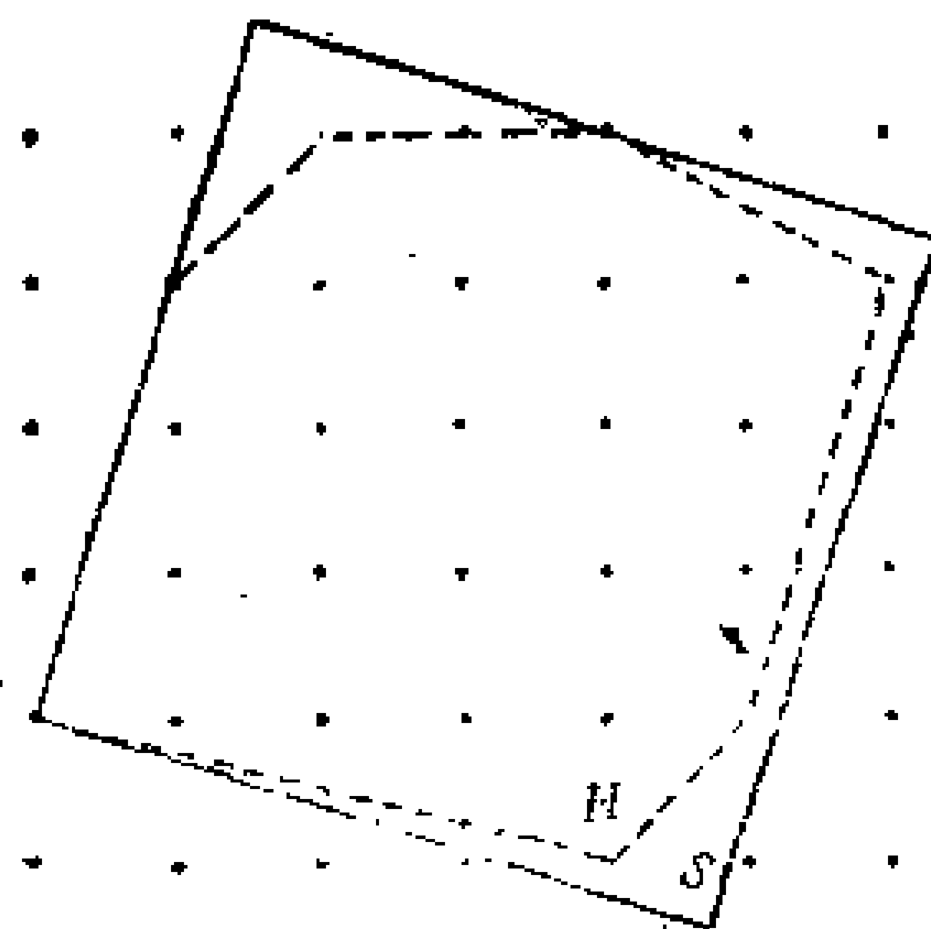


图 13

$$Y\text{的面积}=q+\frac{p}{2}-1,$$

式中q为Y内格点数，p为Y的边界上的格点数．（这包括顶点与边上的其他任何格点．关于这个定理的证明，请看后面的参考文献．）根据匹克定理便有

$$H\text{的面积}=q+\frac{p}{2}-1\leqslant n^2,$$

因而

$$q+\frac{p}{2}\leqslant n^2+1.$$

因为S的弹性边界收缩成H（如果说它真的会收缩的话！）所以H的周长不会超过S的周长：

$$H\text{的周长}\leqslant 4n.$$

显然，任何两个格点间的距离都不可能小于1，因

此沿着H的边界根本没有容纳多于$4n$个格点的任何余地，即

$$p\leqslant 4n,\quad \frac{p}{2}\leqslant 2n.$$

加上前面的结果$q+\frac{p}{2}\leqslant n^2+1$，便得

$$S\text{覆盖的格点数目}=q+p\leqslant n^2+1+2n=(n+1)^2.$$

注：平面点集S的凸包H是包含S的全部平面凸集的交集.如果一个凸集包含S，则也包含H，在这个意义上讲H是最小的．H一个多余的点也没有——它只能大到刚好包含S而又是凸的．如果S自身就是个凸集，H和S当然也就完全相同了．

参考文献

罗斯·洪斯贝格尔（Ross Honsberger），数学技巧(Ingenuity in Mathematics)，vol. 23, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, 27—31.

十二、不透明正方形

边长为1的正方形内部或边界上的线段的集合叫做“不透明”的，如果每一条与正方形相交的直线至少与一条线段相接触.例如，图14(a)的两条对角线就构成一个不透明集合. 图(b) 是另一个不透明集合.对角线的总长为$2\sqrt{2}=2.82$左右，初等微积分里有一则很有意思的练习是:证明图14(b)所示

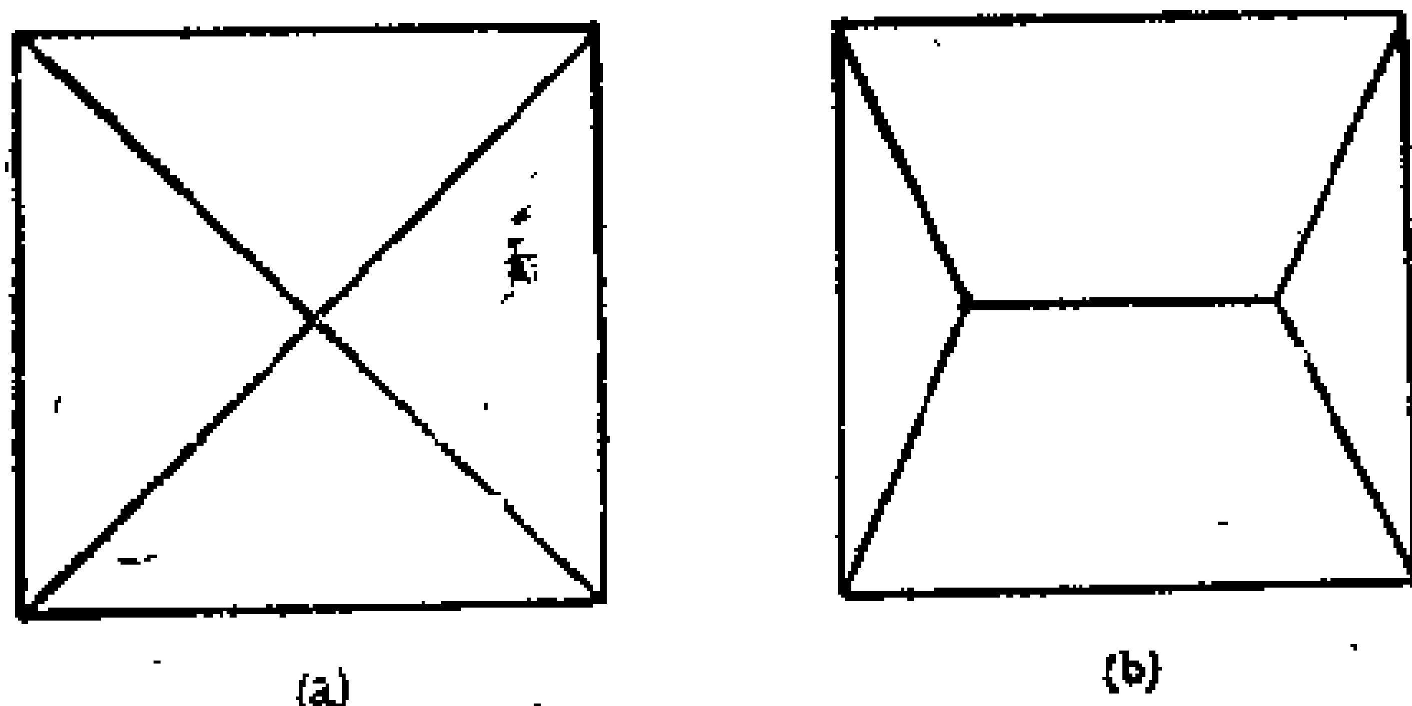


图 14

对称图形的总长为最小的不透明集合，其总长约为$1+\sqrt{3}=2.73$. 试求一个长度比$1+\sqrt{3}$还小的不透明集合.

解答 正方形的相邻两边加上它们所夹对角线的远端那一半构成一个不透明集合（图15）其长度

为

$$2+\frac{\sqrt{2}}{2}<2+\frac{1.42}{2}=2.71<1+\sqrt{3}.$$

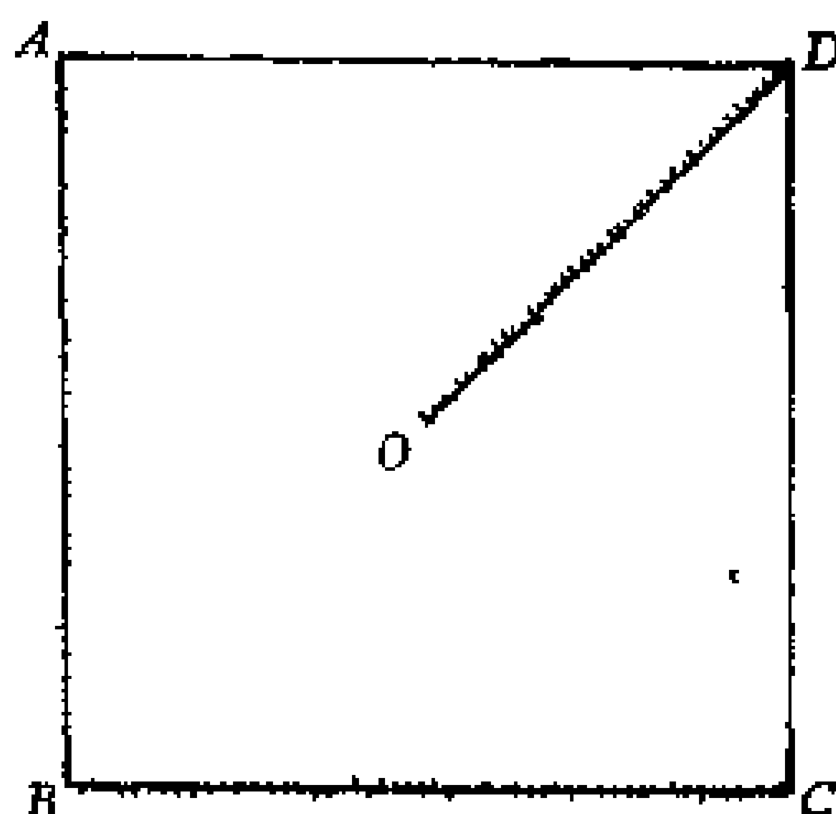


图 15

两条边AB和BC与接触$\triangle ABC$的任何直线都要接触，$\triangle ABC$就完全不必考虑了，单是半对角线OD就足以使正方形的另一半成为不透明的.

事实上还有更有效的办法来考察$\triangle ABC$．$\triangle ABC$中一点P，如果使得每边在此点都对着一个120°角，就叫做三角形的费马点，从这点至三角形三顶点距离之和为最小（图16）．

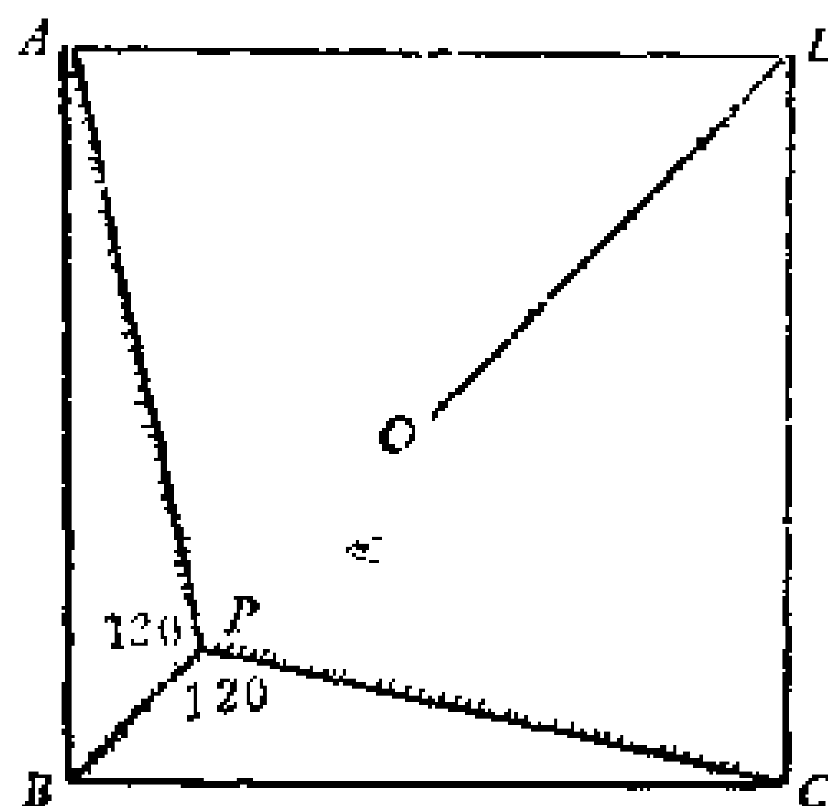


图 16

$XA+XB+XC$在$X=P$时有极小值。

关于这个结果的详尽论述请参考我的著作《Mathematical Gems》vol. 1, 24—34（有中译本，江嘉禾译，四川教育出版社出版，《数学瑰宝》第一辑，27—42页——译者）．在那里证明了，和数$PA+PB+PC$的极小值由线段BB'给出，B'是从AC边向外侧作出的等边三角形的顶点（图17）．

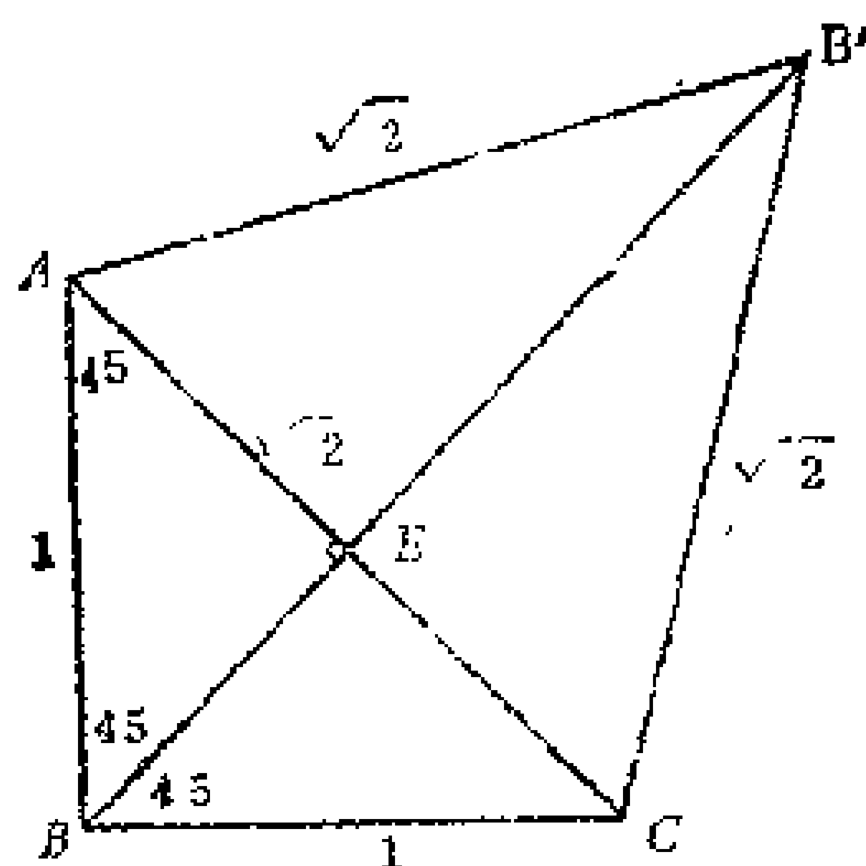


图 17

显然，此时BB'是AC的中垂线，$\triangle ABE$是等腰的．于是有

$$BE=AE=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BB'=BE+EB'=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}).$$

加上半对角线$OD=\sqrt{2}/2$，便得到一个不透明集合，其总长约为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{3})=2.64.$$

上述精彩的解答是安大略省奥尔良市的一位中学教师莫里斯·布哇列 (Maurice Poirier) 给出的。

十三、打叉与画圈

假定在三维空间中的$8\times8\times8$立方体上来玩打叉叉画圈圈的游戏。先得到一排8字就算赢了，试问有多少条8字排贯穿立方体。

解答 这个问题并不难，直接数一下就可以解决。不过，有一个很妙的解决〔里奥·毛塞的许多解法中的一个〕是先考虑一个$10\times10\times10$的立方体，它把给定的$8\times8\times8$立方体包在内部，这样就有一层厚度为1的壳．内部的$8\times8\times8$立方体中的赢家的8字排向两端延伸，就会刺穿外壳的两个单位立方体．但是壳中每个单位立方体只被一条8字排穿通，因此赢家的每排8字唯一地对应着外壳中的一对单位立方体，赢家的8字排的条数只不过是外壳中单位立方体的个数之半而已，即

$$\frac{10^3-8^3}{2}=\frac{1000-512}{2}=244.$$

这个解法具有普遍意义．对于n维空间中棱长为k的立方体，赢家的直排的条数为

$$\frac{(k+2)^n-k^n}{2}.$$

十四、 直角三角形的一个惊奇性质

试证明：如果把直角三角形的两条直角边分别绕自己的顶点旋转到斜边上去，那么它们在斜边上相重叠的线段长是三角形内切圆的直径长（图18）．

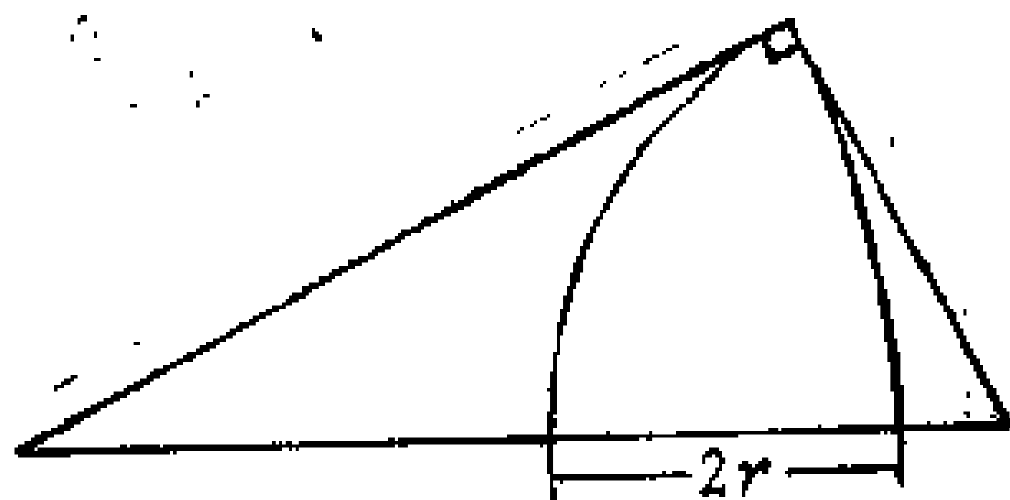


图 18

解答 一般说来，三角形的内切圆的大小不是边长的简单函数，但对直角三角形却有下面明显的关系：

直径＝（直角边的和）－（斜边）．

这只要作下面的解释就明白．过直角边切点的两条半径在直角边的投影不变（图19）．因为从一点到圆的两条切线等长，所以看图便知

（直角边的和）－（斜边）＝〔$(x+r)+$

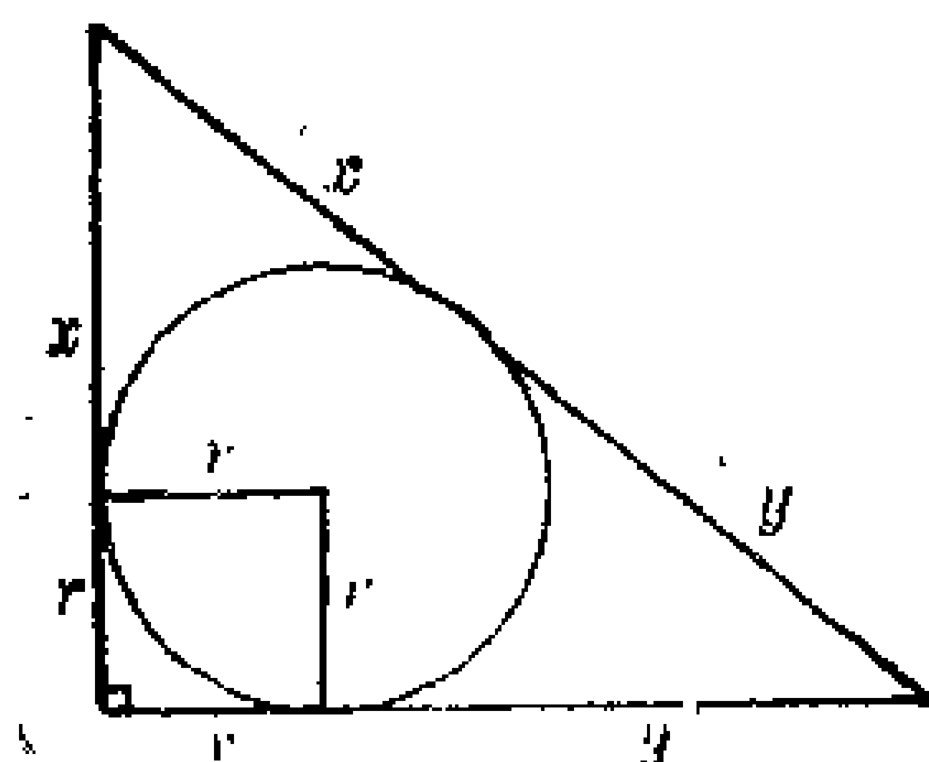


图 19

$$(r+y)\} -(x+y)=2r.$$

题中重叠部分的长就是（直角边的和）-（斜边），由此立刻得到所要的结论.

还容易推出下面的关系.如果在直角$\triangle ABC$的斜边上作高BD，那么$\triangle ABC$以及由BD分割出的两个小三角形的三条内切圆半径r，r_1，r_2的和等于高BD（图20）.因为

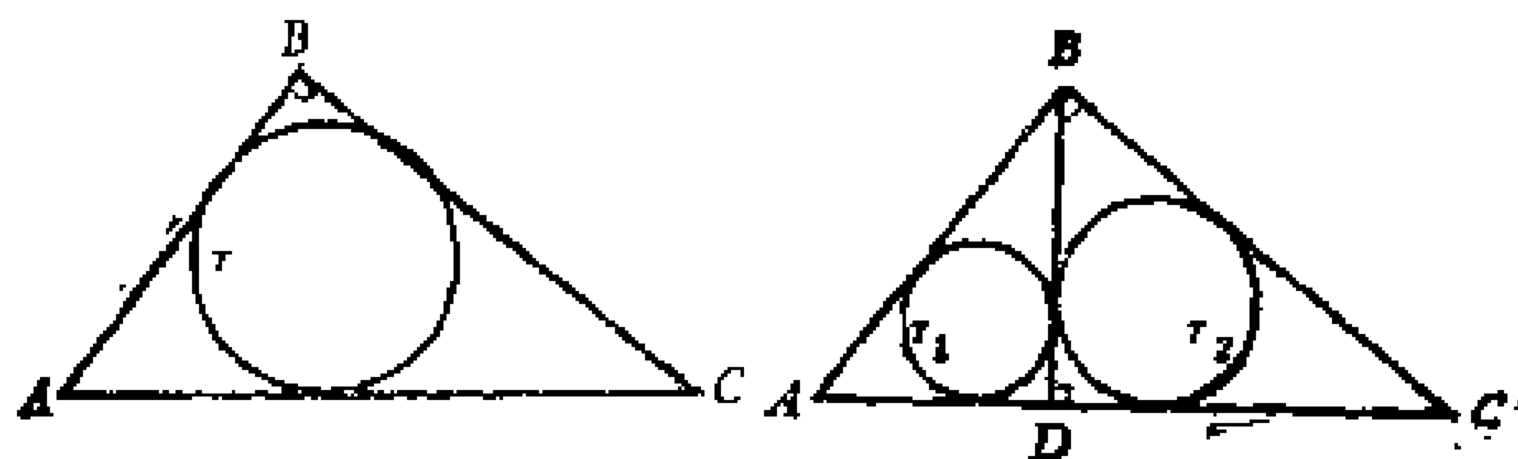


图 20

$$2r+2r_1+2r_2=(AB+BC-AC)$$
$$+(AD+BD-AB)+(BD+DC-BC)$$

$$=(AD+DC)-AC+2BD,$$

所以

$$r+r_1+r_2=BD$$

十五、4444^{4444} 的位数

设4444^{4444}的十进位表示中各位数之和为 A，A中各位数之和为B，问B中各位数之和是多少？

解答 若自然数的常用对数在$k-1$与k之间，则此自然数是k位数．现在

$$\log_{10}4444^{4444}=4444\log_{10}4444.$$

用$[x]$表示不超过x的最大整数，我们便看出4444^{4444}的位数为

$$N=[4444\log_{10}4444]+1.$$

因$4444<10^4$，故$\log_{10}4444<4$，从而

$$N\leqslant 4444(4)+1<20,000.$$

因为每位数都是9或小于9，所以$A<20,000(9)<199,999$．但是199,999的各位数之和大于任何一个小于199,999的自然数的位数之和．因之，

$$B=(A\text{的位数之和})<1+5(9)=46.$$

于是B的位数之和S不能大于12，而12是不超过45的全部自然数的位数和中最大的一个和（即39的位数之和）．

由于一个数与其位数和模9同余，因此

$$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv S \pmod 9.$$

现在取模9有

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} \equiv (2)^{4444} \equiv 2(2^3)^{1481}$$
$$\equiv 2(-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7.$$

因之，$S \equiv 7$，这意味着$S=7$，因为7是不超过12的数中唯一的一个与7模9同余的数。

十六、方　程

$$\sigma(n)+\varphi(n)=n\cdot d(n)$$

人们时常提到，著名的方程 $e^{\pi i}=-1$ 把整个数学中最重要的四个数联系起来了.方程

$$\sigma(n)+\varphi(n)=n\cdot d(n)$$

稍逊色一点，但却把初等数论中三个最突出的函数联系在一起了：

$\sigma(n)$——n的正因子之和，

$d(n)$——n的正因子之个数，

$\varphi(n)$——尤拉φ函数，即自然数m之个数，m与n互素〔$(m,n)=1$〕，并且$m\leqslant n$.

当然，你也可以想把哪些函数拉在一起就把哪些函数拉在一起，拼凑出一个数学关系，不过这里要请你证明一个令人吃惊的事实：方程

$\sigma(n)+\varphi(n)=n\cdot d(n)$是$n$为素数的充要条件.

解答　(i)设n为素数，则n的因子有1与n. 故$\sigma(n)=n+1$，$\sigma(n)=n-1$，$d(n)=2$.这时

$$\sigma(n)+\varphi(n)=2n=n\cdot d(n),$$

因此，条件是必要的.

(ii) 设 $\sigma(n)+\varphi(n)=n\cdot d(n)$，且$n$不是素数．$n=1(1+1\neq1\times1)$ 不满足此方程，这表明$n\geqslant2$．

$n>1$时，$\varphi(n)$不包括数n自身，故有

$$\varphi(n)<n.$$

因为n是复合数，它必然至少有三个因子．用k表示$d(n)$，则n的正因子表成

$$d_1=1<d_2<\cdots<d_k=n$$

由于 $k=d(n)\geqslant3$，所以因子 d_2 不是最大因子，因而

$$d_2<n \quad 且 \quad n-d_2\geqslant1.$$

由此得出

$$\begin{aligned}n\cdot d(n)-\sigma(n)&=kn-(d_1+d_2+\cdots+d_k)\\&=(n-d_1)+(n-d_2)+\cdots+(n-d_k)\\&\geqslant(n-1)+1+0=n>\varphi(n)\end{aligned}$$

这表明不能有 $n\cdot d(n)-\sigma(n)=\varphi(n)$．这个矛盾证明了$n$必须是素数．

或许天字第一号的著名素数条件是下面的威尔逊(Wilson)定理：

n整除$(n-1)!+1$的充要条件是n为素数．

1965年美国数学月刊登载了下面E1702号问题．它是弗吉尼亚州邱及瀑布城的道格拉斯·林德（Douglas Lind）提出，而由哥伦比亚大学的肯尼思·克拉默（Kenneth Kramer）与布鲁克林大学

的斯蒂文·明斯卡(Steven Minsker)解决的。

试证明，n整除$N=\sum_{r=1}^{n-3} r(r!)$的充要条件是n为素数.

解答 我们有$N=1(1!)+2(2!)+\cdots+(n-3)[(n-2)!]$.

由 $r(r!)=(r+1)r!-r!=(r+1)!-r!$，便得

$$N=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+[(n-2)!-(n-3)!]=(n-2)!-1.$$

通乘以$n-1$，再在两端加上n，得

$$(n-1)N+n=(n-1)!+1.$$

根据威尔逊定理，n是素数的充要条件为n是$(n-1)!+1$的因子，上面最末的方程表明当且仅当n为N的因子时这一点才成立，因为n与$n-1$总是互素的.

十七、关于k云

平面上有一条带S，宽为w，我们把单位圆放在带S中，不让圆内之点相重．如果横穿S带的任一直线至少与k个圆相交（包括相切），就说这些圆构成了一朵k云．试证明，对一朵2云，$w \geqslant 2+\sqrt{3}$（图21）

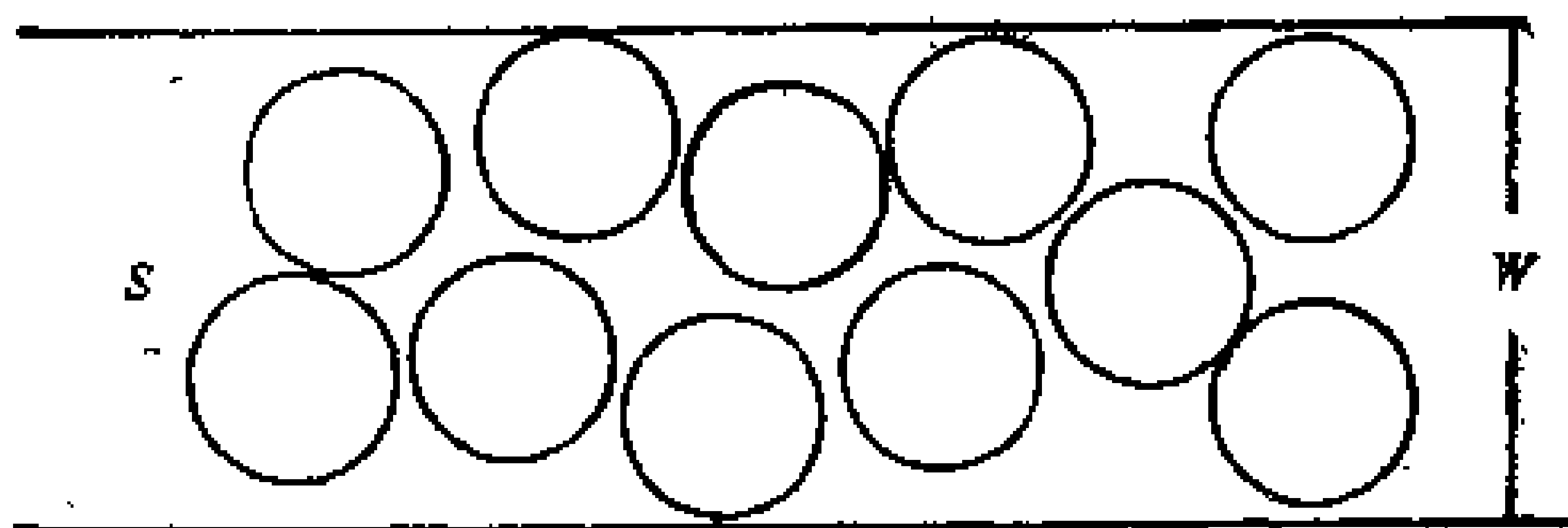


图 21

解答 通过2云中任一圆C的圆心O，作一直线m与S的平行线交成直角（图22）．m必定会与另一个圆A相交．用Q表示从A的圆心P到直线m的垂足．因m与A相交，故PQ不会比半径长，即$PQ \leqslant 1$．又因C与A不重叠，故$OP \geqslant 2$．由商高定理有

$$OQ=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PQ}^2} \geqslant \sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}.$$

因S必须在OQ两侧至少延长一段等于半径的距离

才能容纳得下A与C，所以S的宽为

$$w \geqslant 2 + OQ \geqslant 2 + \sqrt{3}.$$

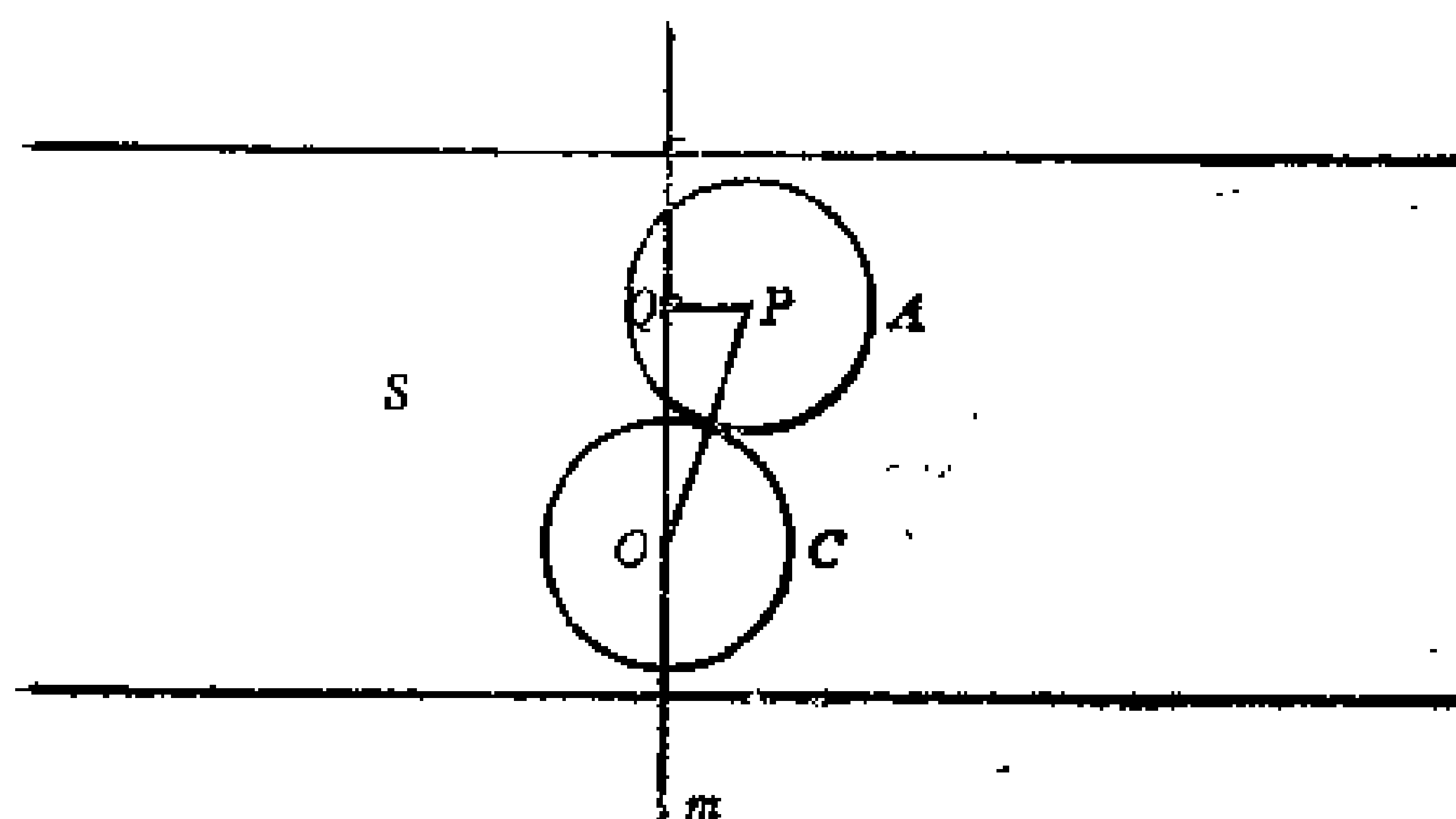


图 22

十八、极小和

由集合（1，2，3…，n）中抽取a_i，允许重复，可以得到n^k个不同的k数组（a_1，a_2，…a_k）。任一k数组中最小的数用a_i表示。试证明下面这个意想不到的结果：全部最小的a_i之和就是前n个自然数的k次幂之和$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$，即

$$\sum \min(a_1, a_2, \cdots a_k)=\sum_{m=1}^{n} m^k$$

解答 本题解决得很漂亮，只用到最基本的概念。这个概念太简单，平常少有用到。在对自然数r_i的级数求和时，数数的方式可以是确定≥1的项的项数，≥2的项的项数，…等等。

$\sum r_i=$（≥1的项数）+（≥2的项数）+…，

按这种数法，一个数r会在r个项中都数到，因此计入了总和之中。例如$r=3$就在

（≥1的项数），（≥2的项数），（≥3的项数）

中被计过数，但在以后的项中就数不到了。这个操作步骤相当于迅速巡视一个级数，从每一项（只要

这一项还剩有数可以交出来）挑出1来，每巡视一次得到一个和，然后再把全部和加在一起。（就好像把r看成是一札r根火柴棒。）

实际上很容易计算本题中和数的项数，它至少应等于一个整数t。显然我们有

$$\min(a_1, a_2, \cdots a_t) \geqslant t$$

的充要条件是k数组的每个$a_i \geqslant t$。有这条性质的k数组的个数就是从$(t, t+1, \cdots, n)$中取a_i所组成的k数组的个数.因为每个a_i都有$n-t+1$个选法，故这种k数组的个数就是$(n-t+1)^k$，因此

$(\geqslant t$的项数$)=(n-t+1)^k$，

从而本题所求的和为

$$\sum \min(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \sum_{t=1}^{n} (\geqslant t \text{ 的项数})$$

$$= \sum_{t=1}^{n} (n-t+1)^k$$

$$= n^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \cdots + 1^k$$

伊凡·尼文(Ivan Niven)教授把上面的推证作得更为完美。他首先确定，具有极小$\geqslant t$的k数组的个数为$(n-t+1)^k$由此公式得出极小$\geqslant t+1$的k数组的个数为$(n-t)^k$。极小正好是t的k数组的个数就等于$(n-t+1)^k-(n-t)^k$，在本题的总和中公项就是$t\,[(n-t+1)^k-(n-t)^k]$。对$t=1$，2，

…, n求和得

$$1[(n)^k-(n-1)^k]+2[(n-1)^k-(n-2)^k]+3[(n-2)^k-(n-3)^k]+\cdots+n[1^k-0^k]$$

$$=n^k+(n-1)^k+(n-2)^k+\cdots+1^k$$

确定 $\sum\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的值，读者可能会感到是非常有趣的一道练习题。

十九、7^{9999}的最后三位数

7^{9999}的最后三位数是哪三个数字？

解答 注意$7^4=2401$。因此

$7^{4n}=(2401)^n=(1+2400)^n=1+n\cdot 2400+C_n^2$

$\cdot 2400^2+\cdots$，上面的二项展开式中从第二项以后起，所有的项写成数字时末尾都至少有四个零，因此都不会影响到结果的最后三位数字。最后三位数字由

$$1+n\cdot 2400=24n\cdot 100+1$$

来决定。如果$24n$的最后一位数是m，则

$$24n\cdot 100+1=(\cdots m)100+1=\cdots m01,$$

即以$m01$结尾。$n=2499$时，$24n$以6结尾，于是我们知道

$$7^{4n}=7^{9996}\text{以601结尾}$$

因为$7^3=343$，故得

$$7^{9999}=7^{9996}\cdot 7^3=(\cdots 601)(343)=\cdots 143,$$

（直接算乘法）得出最后三位数字是143。

其实我们满可以这样来解答：当 $n=2500$ 时，$24n$以 0 结尾，又有 $7^{4n}=7^{10000}$以001 结尾，于是

$$7^{10000}=\cdots 001=\cdots 000+1=1000k+1$$

由上式可得$7^{10000}=1000(k-1)+1001$。除以7得

$$7^{9999}=\frac{1000(k-1)}{7}+143.$$

因为右端必须是整数，故7必定整除 $1000(k-1)$。但7不能整除 1000，故必整除 $k-1$，因而对某个整数 q，我们有 $7^{9999}=1000q+143$。由于 $1000q$ 以000结尾，所以知道7^{9999}最后三位数字是143。

二十、掷骰子（一）

标准骰子各面分别标有1，2，3，4，5，6，重复掷之，直至连续计算的和超过12为止。问最可能出现的和是多少？

解答 考虑倒数第二次掷的那一次。这次的总和一定是12，11，10，9，8，7中之一.若和为12，则最终出现13，14，15，16，17，18之中的任何一个，并且出现的机会均等。类似地，若最终的和数出现之前的和是11，则最终的和应为13，14，15，16，17里的一个，每个出现的机会相同，以此类推。在每种情况都可能出现13，而且也只有13才在每种情况下有出现的可能，因此最可能出现的和数是13。

一般，用同样的推论可以证明，首次出现超出数$n(n \geqslant 6)$的最可能的和数是$n+1$。

二十一、穿刺立方体

一个20×20×20的实心立方体C由2000块2×2×1的砖砌成。试证明这个立方体能够被与它的一个面垂直的一条直线刺穿，这条直线要通过立方体的内部但却不会穿过任何一块砖。

解答 我们来考虑C中的8000个单位立方体。在C的每个面上，单位立方体的棱组成了一个20×20格子。在一个面的内部，格子中有19(19)=361个点。垂直于这个面，并通过这些点的361条直线顺着一排单位立方体的棱一直穿到对面相应的格子点。刺穿C的内部的这种直线总共有3(361)=1083条。令L表示它们中的任一条。

过直线L，并平行于C的面的两张平面把C分为四个长方体，每个长方体都有一条棱是L。令A表示四个长方体中的某一个（图23）。由于A的维数之一是20（即C的整条棱），A必然包含偶数个单位立方体。一块2×2×1的砖可能会有1个、2个或4个单位立方体在A中，但决不会有一块砖正好有三个单位立方体在A中。出现2或4个单位立方体的砖总

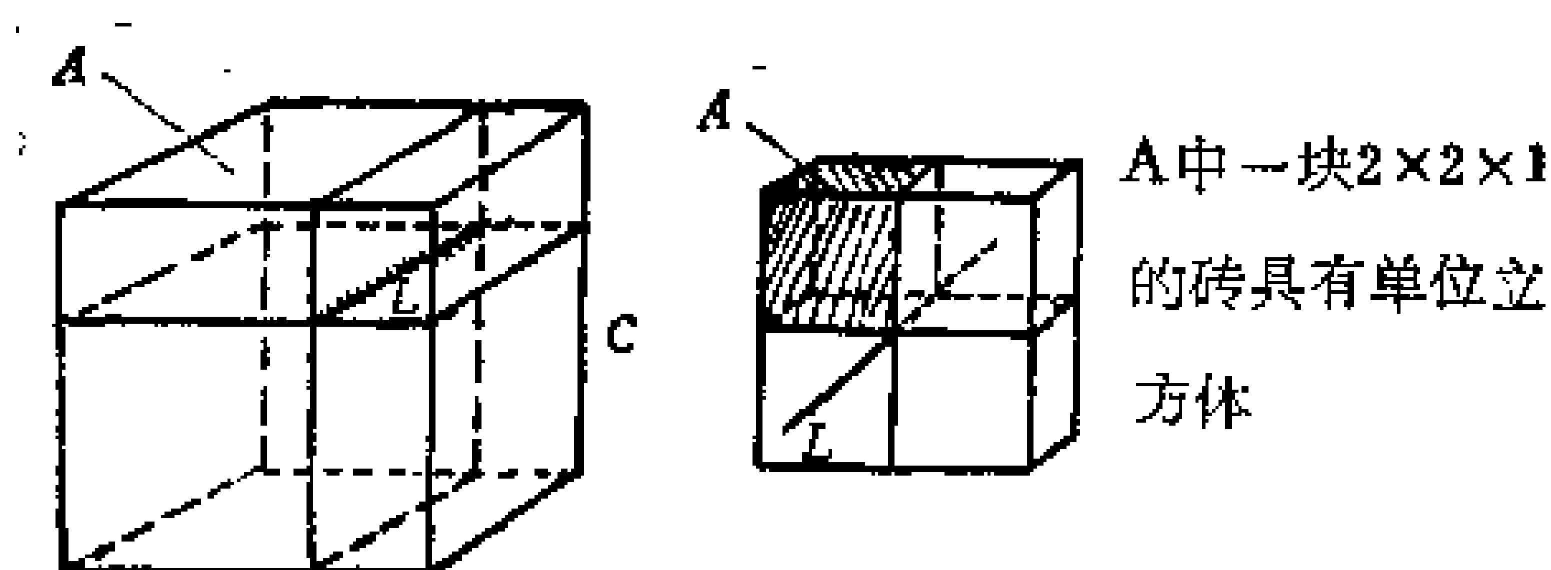


图 23

共给了A偶数个单位立方体。因此必然有偶数块砖只给了A一个单位立方体。但是只有一个单位立方体在A中的砖必定会被L从正中穿过（沿着四个单位立方体的公共棱）。因此L必定刺穿偶数块砖。

然而，一块砖只能被一条直线L穿过。实际上每块砖的确被一条也仅仅是一条直线L穿过，一共穿了2000处。由于直线L共有1083条，每条穿过偶数块砖，故不是全部L都能穿过两块砖。至少有83条直线L根本不穿过任何一块砖。

二十二、二重序列

对某个自然数n，可以构造出一个序列，使得1，2，…，n的每一个都出现两次，但每个数r第二次出现必须是在距第一次出现的第r个位置处。例如，$n=4$时有

4，2，3，2，4，3，1，1。

$n=5$时有

3，5，2，3，2，4，5，1，1，4。

$n=6$或7时不存在这种排列法。$n=8$时有

8，6，4，2，7，2，4，6，8，3，5，7，3，1，1，5．试证，除非$n\equiv 0$，或1（mod4），否则不存在这样的序列。

解答 把这种序列中的位置编上号：1,2，3，…，$2n$.假设1第一次出现的位置是p_1，2第一次出现的位置是p_2，等等。于是1第二次出现在p_1+1处，2第二次出现在p_2+2处，等等．表示位置的数目之和既可以写为

$$1+2+3+\cdots+2n$$

也可以写为$(p_1+p_1+1)+(p_2+p_2+2)+\cdots$

$+(p_n+p_c+n)$,

因此

$$\frac{2n(2n+1)}{2}=2(p_1+p_2+\cdots+p_n)+\frac{n(n+1)}{2}.$$

令 $p_1+p_2+\cdots+p_n=P$，则

$$\frac{2n(2n+1)}{2}=2P+\frac{n(n+1)}{2},$$

于是得

$$P=\frac{2n(2n+1)-n(n+1)}{4}$$

$$=\frac{3n^2+n}{4}=\frac{n(3n+1)}{4}.$$

因为P是整数，故 $n(3n+1)$ 必定能被4整除，然而在 $n\equiv2$或$3(\mathrm{mod}4)$ 时，我们得到$n(3n+1)\equiv2(\mathrm{mod}4)$，这是个矛盾。因此，除非 $n\equiv0$ 或 $1(\mathrm{mod}4)$，否则不存在满足题意要求的序列。

D.C.B.马什（Marsh）在解答（见文献）中证明了，对每个 $n\equiv0$ 或1（mod4）的确存在一个如题所说的序列.

现在来考虑上述问题的一个姊妹问题：把1，2，…，n排成一排，除了第一个数可以随便挑选外，要使数 k 排入此排内必须有$k-1$或$k+1$ 排在前面（不必紧靠在前面）。问这种排法有多少？例如$n=6$时合格的安排法中有

435261与342156。

解答 设第一个数是r，这就把1，2，…，n分成了两组：

$$A=(1,\ 2,\ \cdots,\ r-1)及$$

$$B=(r+1, r+2,\ \cdots,\ n)。$$

我们的规则要求$k-1$或$k+1$必须排在k的前面，这就意味着A中的数是按天然的递减顺序出现在排列中，B中的数则按递增的顺序出现。显然，B中第一个可以出现在第一个数r之后的数不是$r+2$，因为前面没有$r+1$或$r+3$。同样，$r+3$，$r+4$，…，n中没有一个是B中第一个可以排在r后的数。反复使用这则推理可以证明，B中的数必须按$r+1$，$r+2$，…，n的顺序出现在排列中。对A也类似。

只要A与B中的元素在各自的小组中保持天然顺序，这两组无论怎样交叉都没关系。例如，因为r在第一个位置，故$r+1$可以立即排在排列中，也可以在$r-1$与$r-2$排入排列中之后再排进去。因此以r开头的排法就是替A的$r-1$个元素在剩下的$n-1$个位置中挑选$r-1$个位置的选法，即C_{n-1}^{r-1}。B的排好顺序的元素自然地排入空位。因为r可以取1,2,…,n等值，故排法总共有

$$C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+C_{n-1}^{2}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}$$
$$=(1+1)^{n-1}=2^{n-1}$$

种。

二十三　分点圆

平面上给了 $2n+3$ 个点，任意三点都不共线，任意四点都不共圆。证明：一定可以找到一个圆通过已给点中的三个点，同时把剩下的点分成两半，即有 n 个点在圆内，n 个点在圆外。

解法一（由滑铁卢大学M·克朗金解决）

令 A,B 表示已知点集 T 的凸包 H 的两个相邻顶点(图24)。(关于凸包的定义见问题十一。) 由于

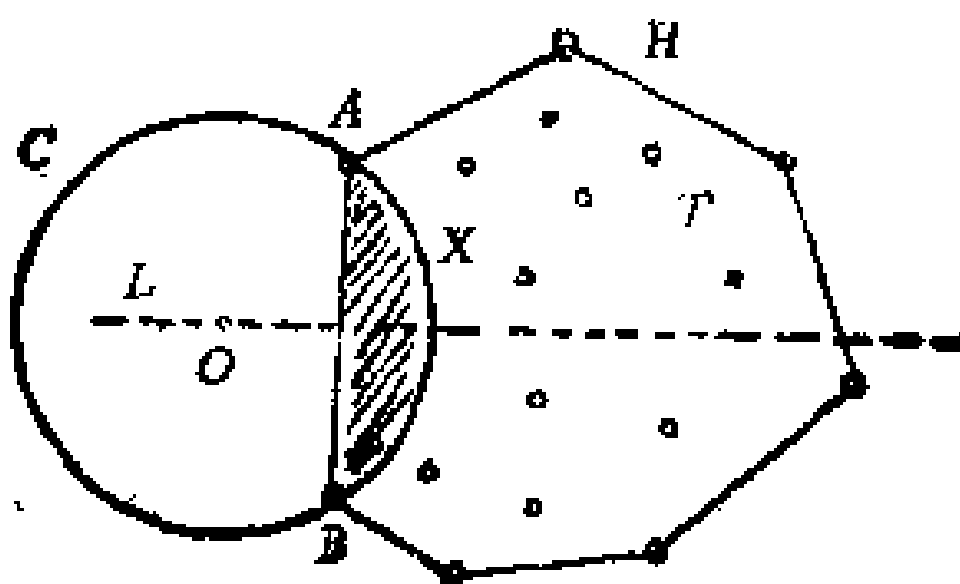


图 24

T 没有三点共线，故线段 AB 上 A 与 B 之间再无 T 的点.假设过 A 与 B 的一个大圆 C' 的圆心 O 在 H 外面。这时 C' 的弓形 AXB 在 H 内，可能含有 T 的某些点。

然而让C'变大可以使弧AXB无限接近AB。圆变大，弧AXB在向AB靠近时，那些原先在弓形AXB中的T的有限个点就不再属于弓形AXB。于是过A，B就存在任意多个圆，其弓形AXB连同此弧不包含T的点。令C就表示一个这种圆，其圆心为O。

首先我们有一个圆C，只通过T的两个点A与B，同时圆内不再含有T的点。现在来变动C，让圆心O沿着AB的中垂线向AB靠拢，并且不断改变半径长使圆C始终通过A与B。随着O向AB靠拢，弓形AXB越来越大，包含的H的点越来越多。O跨过AB时，弓形AXB就变成了（AB确定的）C的大弓形，终于大得来把整个凸包H都覆盖完了，因而覆盖了整个集合T。由于T中任何四点都不共圆，故弓形只得一个一个地围进T的点。当圆周通过第$n+1$个点K时，圆C正好把前n个点包含在内，并通过A，B，K三点．T的另外n个点仍在圆C之外，于是得出所要的结论。

解法二（滑铁卢大学 L. J. 狄基）令O表示任意一个已知点，考虑以O为心的任意圆R。将给定的诸点关于R作反演．（关于反演的解释见参考文献）．圆心O被反演到无穷远点，于是得到$2n+2$个有限远像点的集合S（图26）

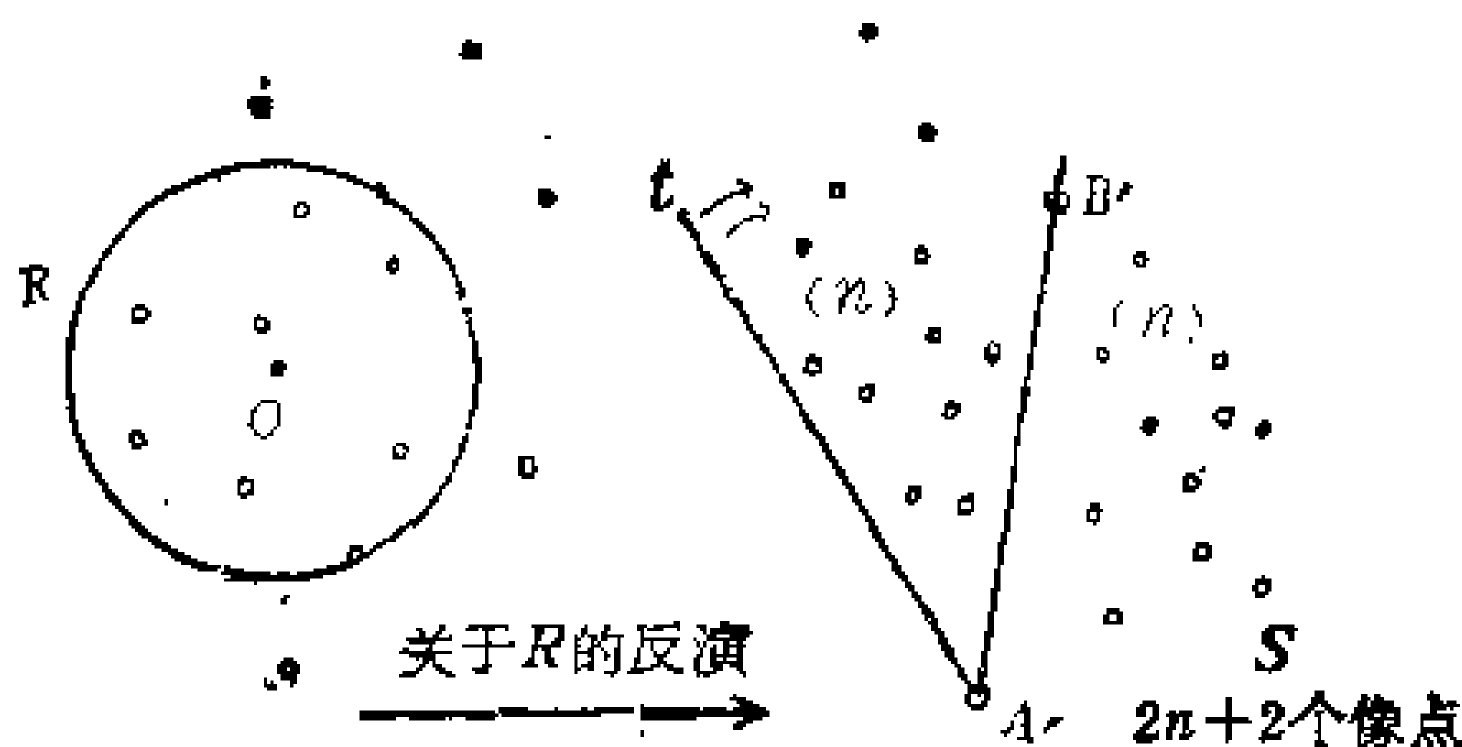


图 25

就从整个S在其一侧的一条直线t开始吧．把t向S移动，直至它开始通过S的一个点，比如说通过A'点．(或者令A'表示S的凸包的顶点，t为通过A'的与凸包只在A'相交的直线．）现在让从A'起的两条射线的任意一条绕着A'横扫S。下面马上就要证明，横扫射线将一个一个地通过S的点。因此它最终会通过一个像点B'，使得$A'B'$把S的其余$2n$个点分为两半。

令已知集合的A与B表示A'与B'的像原。我们看到，$A'B'$不可能通过反演中心O，否则就意味着已知集合的A,B, O三点共线（这是个矛盾）．因此直线$A'B'$反演前的像原必定是通过O的一个圆K（图26）．从而K就通过已知集合的三个点A, B, O。因为在将S中的像点反演回到已知集合的点时，$A'B'$一侧的全部像点都反回到K内，而另一侧的全部像点都反回到K外，因此，K把已知集合一

图 26

分为二了。(K在O点的切线与$A'B'$平行。)

我们不仅解决了问题，而且还知道了，通过给定集合的任意一个点O都可以找到一个（解决问题的）圆。从而可以得到$2n+3$个圆，其中可能只有$(2n+3)/3$个圆是不同的，因为通过O，A，B的一个圆可能算了三次。（由于给定集合的任意四点都不共圆，故在$2n+3$个解圆中的任一个都决不可能计算三次以上。）不只一个解圆通过一个已知点，这并非不可能。

最后我们来证明先前的一个结论。即绕A'的扫动射线只能一个一个地通过S中的像点。和从前一样，首先可以看到，当射线通过一个像点C'，那么这时它不能又同时通过圆心O（如果通过了O，则O与像原C、A就是共线的三个点）。因此，如果射

线要同时通过两个（或更多个）像点，比如说同时通过C'，D'，那么直线$A'C'D'$的像原就会是通过O的一个圆（因为$A'C'D'$并不通过O），即四个已知点O，A，C，D共圆（矛盾！）

参考文献

Coxeter and Greitzer, Geometry Revisited, vol. 19, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, p. 108 及以后诸页。

二十四、三角形的边长

若a，b，c构成三角形的边长，试证明$n=2,3,4,\cdots$时，$\sqrt[n]{a}$，$\sqrt[n]{b}$，$\sqrt[n]{c}$也构成三角形的边长。

解答 若a，b，c构成三角形的边长，则有三角形不等式
$$a+b>c,$$
等等。因此
$$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n>a+b>c=(\sqrt[n]{c})^n,$$
由此得
$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}>\sqrt[n]{c}.$$
$\sqrt[n]{a}$，$\sqrt[n]{b}$，$\sqrt[n]{c}$的另外两个三角形不等式也以同样建立起来，从而得到我们的结论。

二十五、请勿使用微积分

1952年，J. H. 布恰与里奥·毛塞在通俗杂志《数学文库》221—236页上发表了一篇很别致的文章《请勿使用微积分》。平常用微积分解决的一些问题，他们别具匠心地用另外的方法解决了。下面介绍几则。

(i) 第一个问题是计算半径为a的两个正圆柱体成直角相交（即中心轴交成直角）时公共部分的体积。稍停片刻来想象一下刚才所说的相交部分 R。从一个圆柱体的方向上看，R 是圆的，和截出它的圆柱一样地圆。R 的上半部分如图27所示。通过与R的内切球作比较很容易求出R的体积。显然，半径为 a 的球在两个圆柱内都能一滚而下，它也就是两

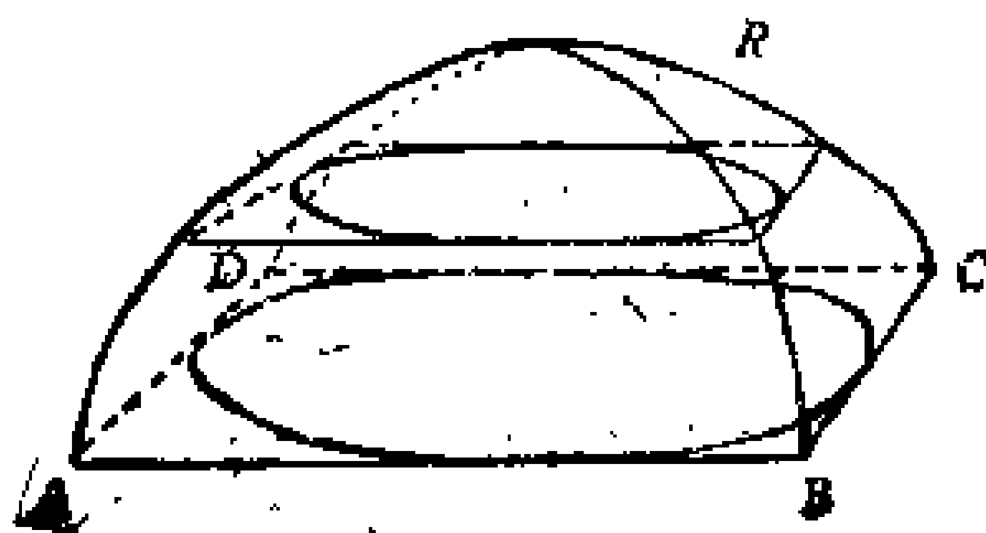


图 27

个柱体相交部分的内切球。

由于具有四重对称性，故R中与底$ABCD$平行的任意一片含有一个正方形的底面．内切球S的这样一片含有一个圆形的底面，正好与R的相应的一片内切。正方形面积与其内切圆面积之比为

$$\frac{(2r)^2}{\pi r^2}=\frac{4}{\pi}.$$

各层求和，得到R的体积是S的体积的$\frac{4}{\pi}$倍。

因此

$$R\text{的体积}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)=\frac{16}{3}a^3.$$

当然，严格证明$R=4S/\pi$要用到微积分学的基本论断，这是此处故意避开的．这类问题是根本没法绕开极限概念的．不过将R与S作比较这一点却赏心悦目，十分令人满意，其正确性也是可以严格证明的。

(ii)过凸曲线C内一个已知点P作一条直线L，使得L从C割出一个面积最小的区域。解这个问题的想法也很巧。如果P点不是L的中点，那么，绕P点向适当的方向稍微一转，在P点的一侧失去的一块楔形面积就会比另一侧得到的还大，这说明割出的区域不是最小（图28）。这个古老的思考方法在解许多问题时都很有用。

从这一思路可以立即很出色地解决下面一个问题：取相距一个单位的两条纵坐标加上曲线 $y=e^x/x$，使得曲线下的区域面积最小。很明显，如果两条纵坐标不等长，那么，稍微移动一下使它们相等，曲线下面积就会变小些。因此，对于给定的实数a，为了面积最小就必须

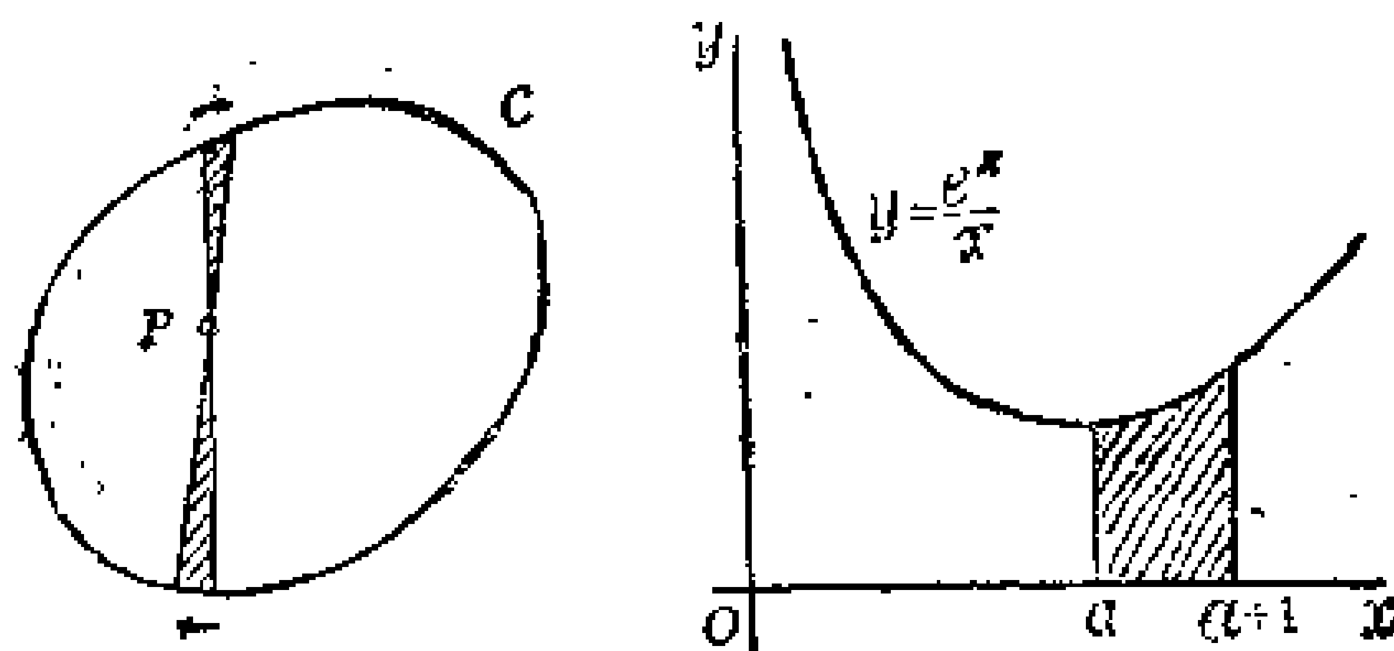


图 28

$$\frac{e^a}{a}=\frac{e^{a+1}}{a+1},$$

由此得

$$a=\frac{1}{e-1}.$$

(iii) 毛塞与布恰巧妙地利用了古典等周问题的结论：周长为L的所有简单 n 边形中，面积最大的是正n 边形（所谓"简单"是指自身不交叉），在假定这种最大n边形存在的前提下，辛辛那提(Cincinnati)大学已故的里查德·代玛尔（Ric-

hard DeMar) 给了一个简洁的新证明，这篇杰出的文章登在《数学杂志》(Mathematics Magazine) 1975年1—12页上，主要是4—6页，文章叫"平面上等周问题的一个简单解法"(A Simple Approach to Isoperimetric Problems in the Plane). 对于多边形要成为"正"多边形的条件，他分为两条分别加以考虑——(1)等边，(2)等角。两种情形的处理方法类似，推理都很美妙，我们仔细讨论第(1)部分予以说明.

用$K=ABCD\cdots$表示一个不等边的简单n边形(图29)，那么，必然有某两条相邻的边不相等，

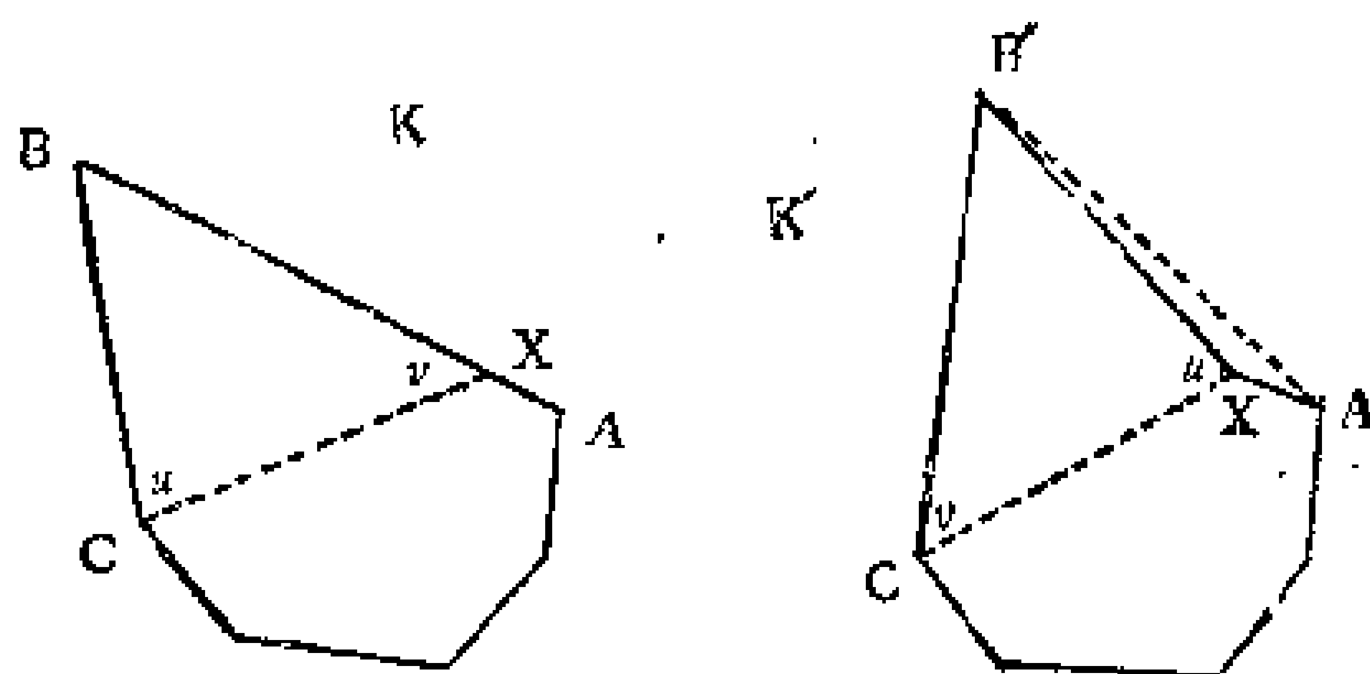


图 29

假设$AB>BC$。在A与B之间选一点X，使得$BX>BC$，则$\angle u=\angle BCX>\angle v=\angle BXC$。现在把$\triangle BCX$切下来翻一转，使$X$与$C$交换位置，于是得到多边形$K'$。由于$\angle u>\angle v$，$X$处的角就比平角还大，所以$K'$不再是凸多边形了。另外还看出$K'$已

不是n边形而是$n+1$边形了.然而因为它不是凸的，我们容易把它变成n边形，同时修正其面积。只消把B点的新位置B'与A相联结，就可以得到一个n边形，面积大些，周长反而小些．把图形扩张使周长等于L，于是面积变得更大.这说明K不是所要求的最大图形。

我们现在承认等周定理，然后来看布恰与毛塞如何把它用来解决一个古老的问题：一个矩形的一边是固定的墙，另外三边尚来固定，但其总长为L，试确定矩形的长与宽之比，使得它围成的矩形区域面积最大。无论围墙$ABCD$怎么样，把它投影到固定墙AD之后得到的四边形$B'BCC'$总有固定周长$2L$（图30）．四边形$B'BCC'$是正四边形，即正方形时面积最大，因此，它的一半$ABCD$也最大。这时长为宽的二倍，问题也就解决了。

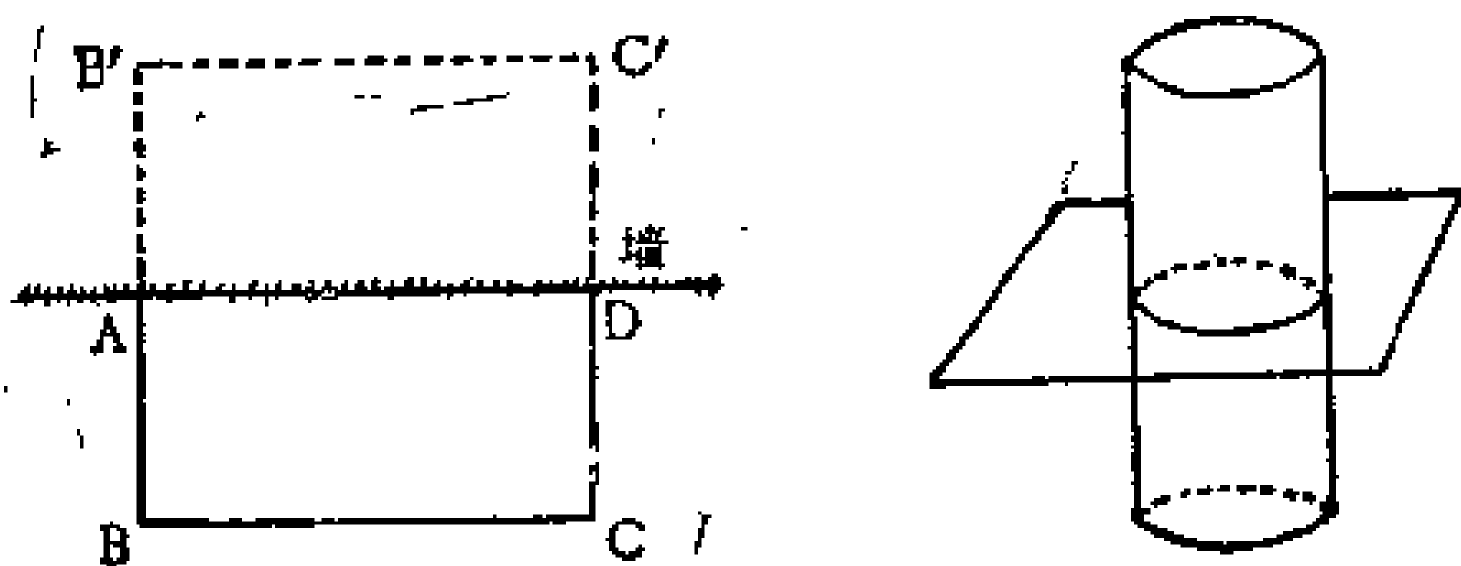


图 30

类似的问题是，给定了表面积，求容积最大的罐头盒。如果"有盖"与"无盖"两种情况中有一

个解决了，那么另外一个情况的解答很快便可得到，因为把开口罐头盒映射到上表面就得到有盖罐头盒，若无盖的最大，则有盖的也该最大。因此，无论高与半径之比 h/r 取什么值，“有盖”时的比值为“无盖”时的比值的二倍。

(iv) 作为等周问题定理的最后一个应用例子，我们再给前面的问题七（屋角的帘子）一个解法。

该问题是：在矩形房间的一角用两张4英尺长的帘子围出最大的一块地面，试确定帘子的位置。

把房角与墙作为参考系的原点与坐标轴。把帘子投射进轴的背面去，得到八边形 $PBP_1A_1P_2B_1P_3A$，如图31所示。不管帘子挂在怎样的位置，这

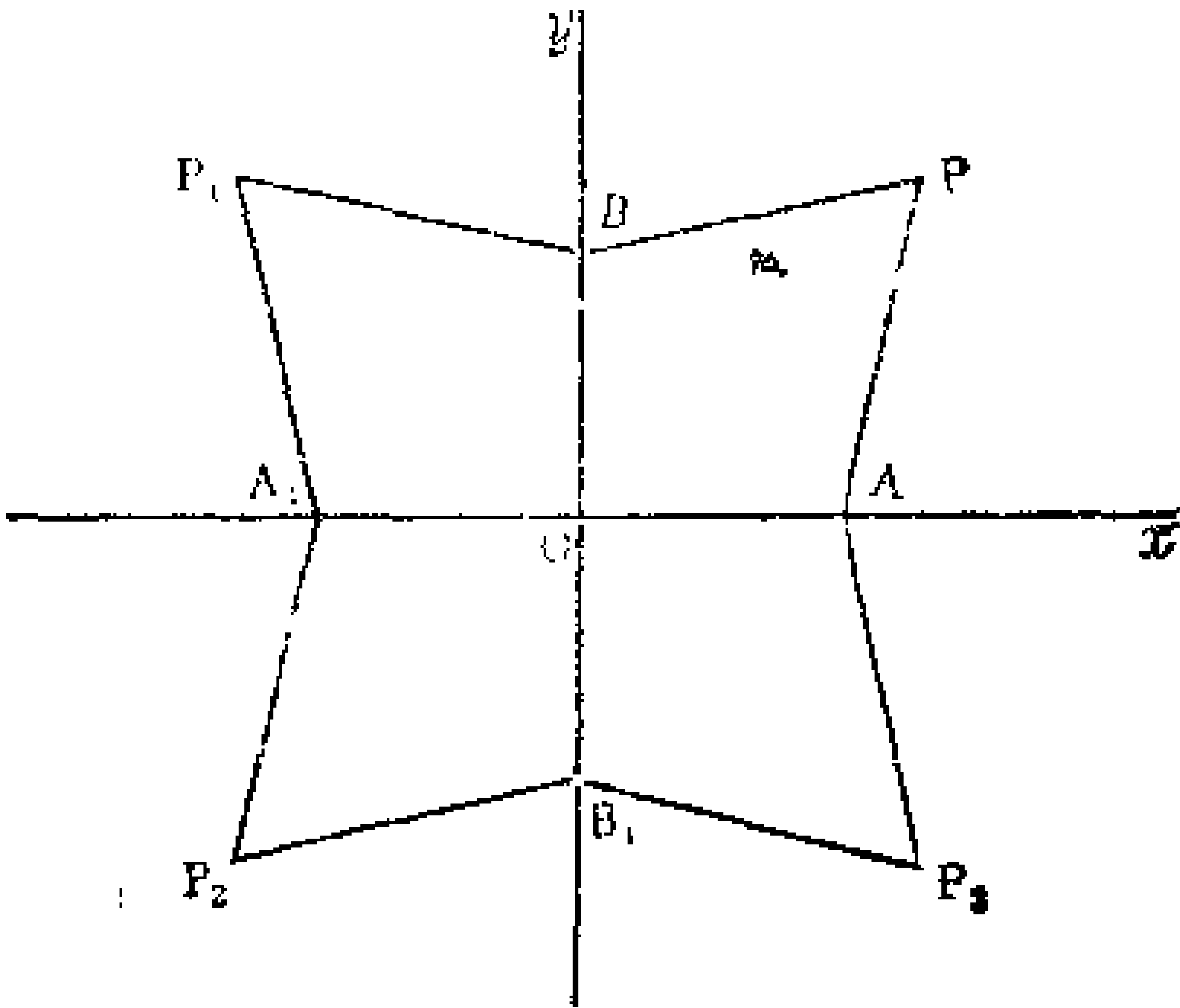


图 31

八边形都有固定的周长 8×4==32 英尺。可以看出，在屋角围出最大的地面就相当于这八边形有最大面积，从而立刻可以得出解答。面积最大的八边形必须是正八边形，面此它的每个角为

$$\frac{1}{8}(8-2)\times180=135\text{度}。$$

通过详细地作图即容易得出结果。

二十六、a^b 与 b^a

确定 a^b 与 b^a 孰大孰小，一般并不难。显然，$2^3<3^2$，$3^4>4^3$。然而把2和3之间的一个数与 3 和 4 之间的一个数联系在一起，问题就来了。请问：e^π 大呢还是 π^e 大？

解答 对于正的x，我们有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$
$$>1+x.$$

因$\pi>e$，故$\pi/e>1$，$x=\pi/e-1>0$。于是

$$e^{(\pi/e)-1}>1+(\frac{\pi}{e}-1)$$

$$\therefore\quad \frac{e^{(\pi/e)}}{e}>\frac{\pi}{e},\ e^{(\pi/e)}>\pi,\ e^\pi>\pi^e$$

用微积分容易证明函数e^x-1-x只有一个极小值零(在$x=0$处)。因此当x取实数值时

$$e^x\geqslant1+x.$$

运用这个关系式，乔治·波利雅(George Polya)给著名的算术几何平均不等式想出了下面这个漂亮的证明。令a_1，a_2，…，a_n表示正实数，A，G分

别示表它们的算术平均与几何平均，即

$$A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots a_n),\quad G=(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$$

让x依次取值$(a_i/A)-1$，$i=1, 2, \cdots, n$，得到n个不等式：

$$e^{(a_1/A)-1}\geqslant\frac{a_1}{A},$$

$$e^{(a_2/A)-1}\geqslant\frac{a_2}{A},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{(a_n/A)-1}\geqslant\frac{a_n}{A}.$$

把这些式子相乘，得

$$e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{A}-n}\geqslant\frac{a_1a_2\cdots a_n}{A^n},$$

这就是

$$e^{n-n}\geqslant\frac{G^n}{A^n}\quad 即1\geqslant\frac{G^n}{A^n},$$

由此得$A\geqslant G$。

注意，只有当n个不等式中都取等号时，才有$A=G$，这就要求对$i=1, 2, \cdots, n$，$(a_i/A)-1=0$，故只有当全部a_i都等于A时，才有$A=G$。

二十七、一则趣味数学题

一个人在邮局买了一些面值1分的邮票，还有相当于所买1分邮票总价3/4的若干张2分邮票，相当于2分邮票总价3/4的若干张5分邮票，以及5张8分的邮票。他用一张钞票刚好把钱付清。问他每种邮票买了多少张？

解答　设这个人买了y张1分的邮票，那么他就买了$3y/4$张2分的邮票，$9y/16$张5分的邮票。因为$9y/16$是整数，故16必定整除y，从而对某个整数x，我们有$y=16x$，于是买邮票的情况就是：$16x$张1分的邮票，$12x$张2分的邮票，$9x$张5分的邮票，5张8分的邮票。假定他用的是一张K元面值的钞票付清邮票钱，那么邮票价钱是

$$16x+2(12x)+5(9x)+8(5)=100K,$$

于是

$$85x+40=100K,\ 17x=20K-8$$

$$x=\frac{20K-8}{17}=K+\frac{3K-8}{17}$$

因为x与K是整数，所以$(3K-8)/17$也必须是整

数。但K必须是 1，2，5，10，20,50,100,1000,10000里面的某一个数①。能使$(3K-8)/17$为整数的K只有$K=1000$，因此这个人买了

18,816张1分的邮票；14,112张2分的邮票；

10,584张5分的邮票；5张8分的邮票。

① 这些数字是美元的面值——译者

二十八、球面上的地图

考虑球面上的一幅地图 M，假定M的每个顶点处恰好有三个国家，这些国家的边界线没有一条是闭环（也就是说，每条边界至少包含两个顶点）。用四种颜色A，B，C，D来着色地图，使得凡有一段公共边界的国家都着上不同的颜色。地图上的一切区域我们都用“国家”这个术语来称呼，至于哪些真的是国家，哪些是水域，我们不在乎。

如果一个国家的边界上的弧的条数是奇或偶，我们便称这个国家是奇或偶。试证明：涂上两种指定的颜色，比如A色与B色中的一种的奇国的总数一定是偶数。

解答 这个问题看来是很困难的，因为即使我们知道某个国家涂的是A色，也要在我们发现了它是奇或是偶之后才知道是否应该把它算在内。下面要介绍的巧妙思想会帮我们的大忙。每个顶点都含于一个小三角形中，如图 32 所示（顶点v和过v点的每段弧的一小段被抹去了，把自由端联结起来构成一个三角形）。当然，这样就在每个顶点处额外

增添了一个三角形国家，使我们有了一幅新地图M'。虽然四种颜色中已有三种出现在v处，但是仍旧剩下了第四种颜色供新三角形涂用。这样就可以按照邻国颜色不同的原则给新三角形涂色．还请注意，在新地图M'中每个顶点处仍然恰好有三个国家。

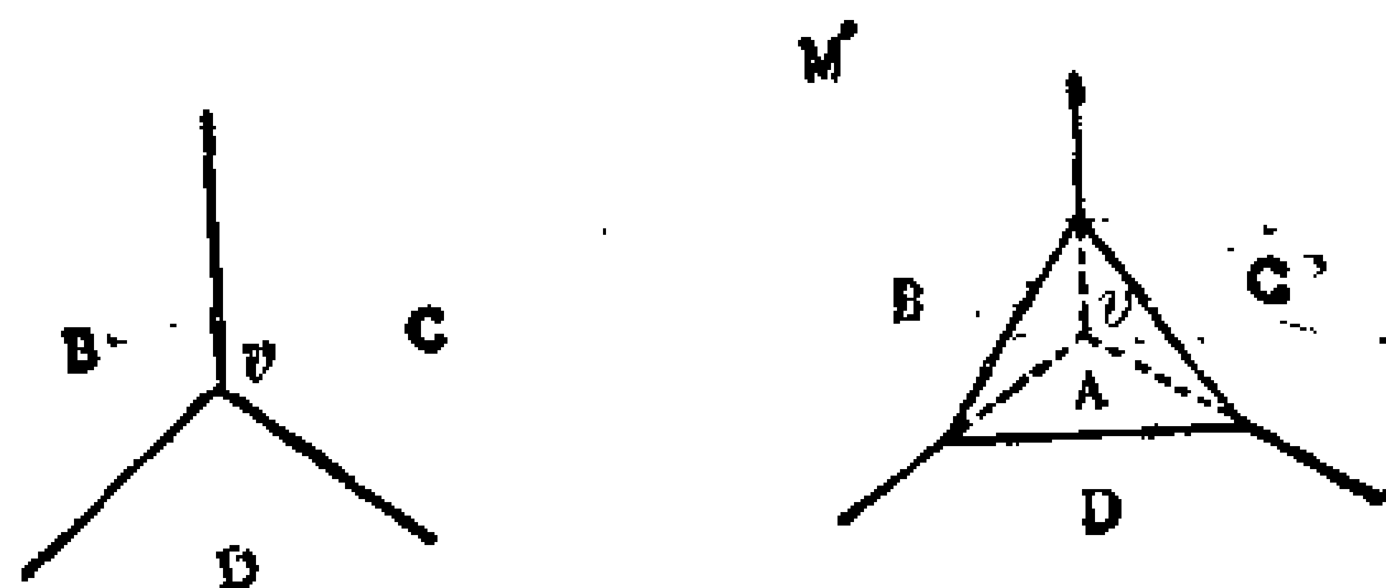


图 32

M'的作用有两个，分别说明如下．新三角形的一条边也是原有的一个国家的新边，这样就把一个奇国变成了偶国，偶国变成了奇国。于是，在顶点v画一个新三角形时，在v处的三种颜色的每一种的奇区域数目变动了1（或多1或少1）．因为新三角形本身成了第四种颜色的一个奇国，所以对于四种颜色的每一种，奇国个数变动了1．就两个颜色来说，它们的奇国个数的总变化为2，0或－2，这要由每个颜色的奇国数的变化是增加还是减少来决定。但是不管怎样，对任意两种颜色来说总变化是一个偶数。因此涂成A色或B色的奇国，新数目与

老数目有相同的奇偶性。对所有的顶点情况都是这样。因此画出M'后，涂A色或B色的奇区域的总数是奇是偶，就同开始时M中的情况一样，于是我们可以通过研究地图M'得到想知道的结果。

其次，通过画出M'，使M的每个国家周围的边界数翻了一番。因此在M'中先前的所有国家都成了偶国，只有新三角形是奇国。我们想要证明，M'中涂A色或B色的新三角形的数目是偶数。

实际上现在的确用不着画小三角形了，因为它们涂的是v处不出现的颜色，所以只消把M的每个顶点标上那里没有的颜色就可以了。现在就假定已经这样办了，我们要证明标上A色或B色的顶点总数是偶数。

为此目的，我们来研究把涂C色与D色的国家隔开的一段弧。这种"分界弧"两端的顶点不能标上C色或D色，因为这两种颜色就在这两个顶点处（图33）。因此分界弧的端点必须用A或B作色

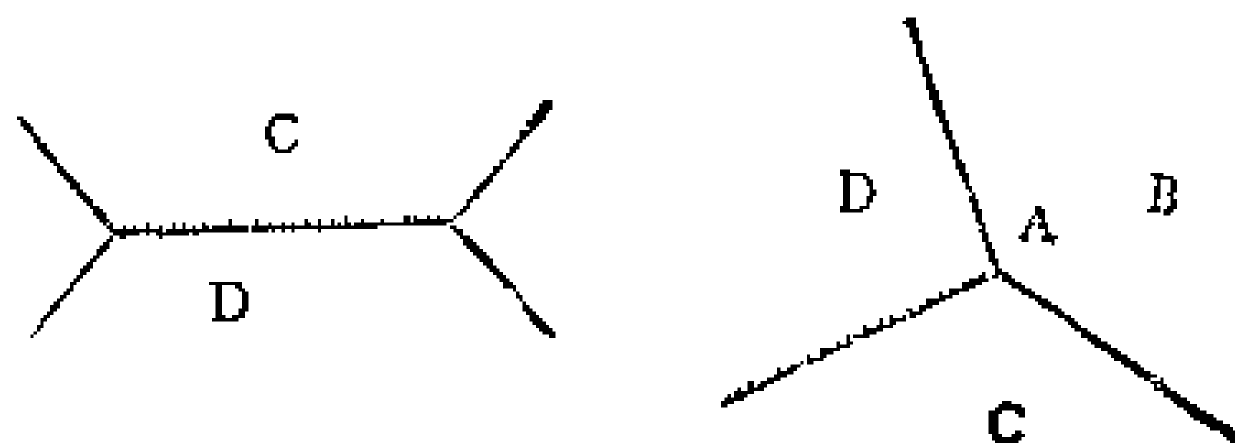


图 33

标，以代表这样的两个顶点。另一方面，如果有一

个顶点标了A色或B色，那么C和D必定就属于此顶点处的国家上涂的三种颜色。这样，这种顶点处有一条边界必然是分界弧。于是我们知道，分界弧的两端要么是 A 要么是B，并且这些分界弧代表了色标为A或B的全部顶点。

我们推理的最末一步是：任何两条分界弧都无公共端点。这一点可以立即加以证明，假设两条分界弧在（比方说）色标为A的顶点处相交，那么此顶点处的三个国家颜色一定是 B，C，D。但是颜色为B与C 的两国间的边不是分界弧；颜色为B 与D 的两国间的边也不是分界弧。因此在色标为 A的顶点外不可能有一条以上的边是分界弧。

这就表明所有分界弧是隔开的。色标为A 或 B的顶点总是成对出现，从而它们的总数是偶数。

二十九、平面上的凸区域

证明平面上面积为π（或大于π）的任何闭凸区域都有距离为2的两个点（图34）

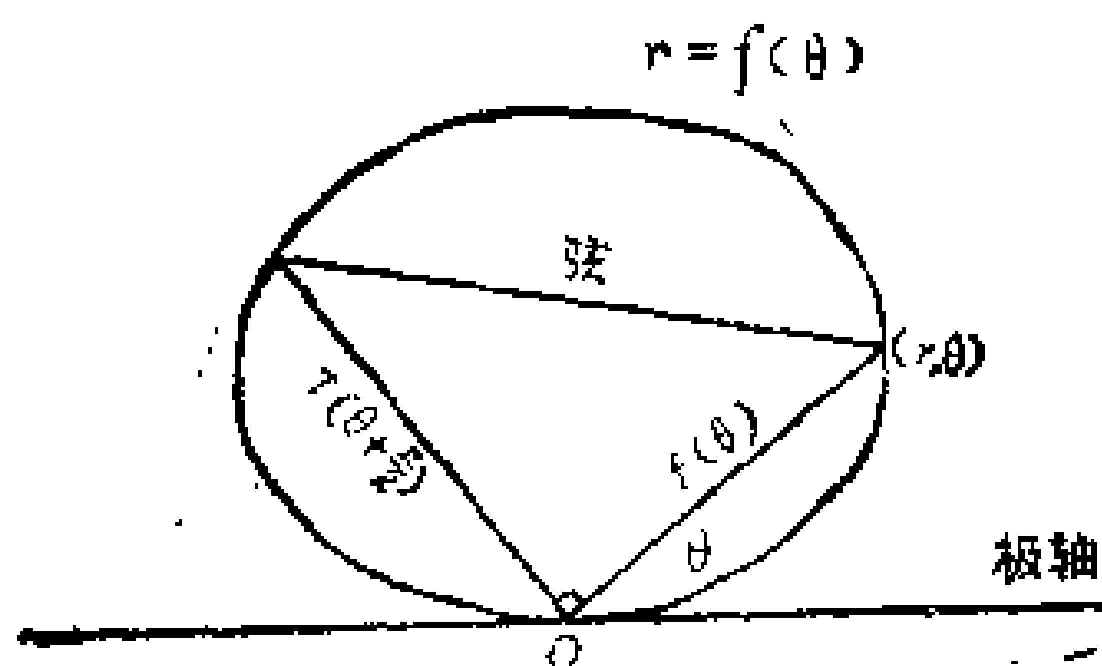


图 34

解答 使用极坐标，令区域在原点与O相切。设区域边界的方程为 $r=f(\theta)$，由通常的面积公式我们有

$$A=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}f^2(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(\theta)\,d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f^2(\theta)d\theta$$

把第二个积分中的θ换成$\theta+\frac{\pi}{2}$，它就变成

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f^2(\theta+\frac{\pi}{2})d\ (\theta+\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f^2(\theta+\frac{\pi}{2})\,d\theta.$$

因此面积就是

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ [f^2(\theta)+f^2(\theta+\frac{\pi}{2})]\ d\theta.$$

此处的被积函数就是本题中区域的弦的平方。如果没有两点相距为2，那么所有的弦都小于2，其平方就小于4，于是

$$A<\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ 4\,d\theta=2\int_0^{\pi/2}\ d\theta=\pi.$$

这是矛盾，所以结论成立。

我们看到，若无弦长大于2，则面积不可就大于π．因此，如果已知面积大于π，我们就可以断定一定有弦比2长．

这个题目与组合几何学的现代论题的许多精采结论有关系。1911年赫尔曼·明柯夫斯基（Hermann Minkowski）的一篇遗著引起了关于平面上闭凸区域的一连串显著成果的出现，他提出了下面这个至今仍十分有名的定理：

如果面积大于4的中心对称闭凸区域的中心在一个格点上，那么它至少还包含另外两个格点。

（中心对称图形是包含一点 O，绕 O点旋转半转又会和自身重合的图形.）

因为在 Mathematical Gems, vol. 1, p. 47（中译本《数学瑰宝》，第一辑，54页）已经讨论过这个定理了，这里就不打算再重新证明它. 不过，下面这个定理是我们容易对付的，它属于悉尼大学的约瑟夫·汉默(Joseph Hammer)(AMM, 1968, p. 157, Mathematical Notes)：

如果面积大于π的一个中心对称闭凸区域 R 的中心O在一个格点上，那就可以把它绕着中心旋转到一个新位置，使得它至少包含另外两个新格点.

证明 因为 O 是R的中心，故它平分 R 的通过它的一切弦. 因此，如果有一条 $\geqslant 2$ 的弦 AB 通过 O，那么，此弦在O的两侧至少可延伸1单位，并且

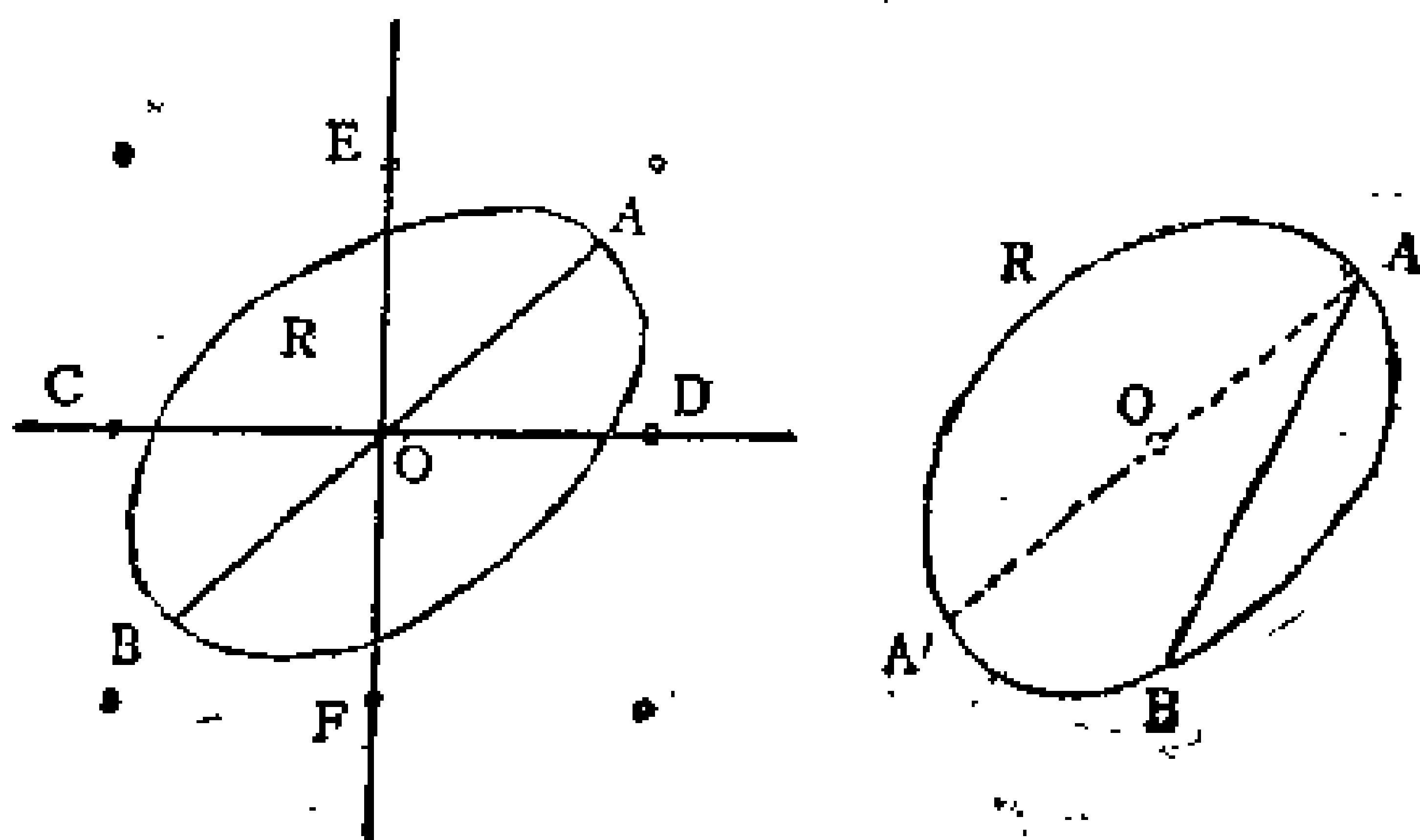


图 35

围绕O旋转后，此弦就会达到一个新位置，通过过O的一条格子线上的两个相邻的格点（C与D或E与F）（图35）

由于R的面积$>\pi$，R的某条弦AB必然大于2．如果AB通过O，那么结论成立；如果AB不通过O，那么O距一端或另一端，比如A，甚至比$AB/2$还远。因为R是中心对称图形，这时弦AOA'比AB还要长．证毕．

用完全相同的思路可以建立汉默文章中的第二个定理：

如果面积大于$\frac{\pi}{2}$的闭凸区域R绕着区域的任意一点P旋转，那么在某个位置上它至少含有一个格点。

证明 如果对R施以几何膨胀变换$P(\sqrt{2})$（即中心为P，膨胀系数为$\sqrt{2}$的变换），则它的线性尺度增加$\sqrt{2}$倍，面积增加2倍．因为新面积会超过π，所以新区域包含一条>2的弦，这就是说R中相应的弦AB的长度$>2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$．和前一定理的情况一样，要么P点是弦AB的中点，要么它距A、B中的一点的距离比$AB/2$还大。无论哪种情况，PA或PB总有一个，比如PA要比$\sqrt{2}/2$大。但是平面上每个点离某一格点充其量$\sqrt{2}/2$那么远

（一个方格的中心C距四个格点顶点恰为$\sqrt{2}/2$）（图36）。因此绕P点旋转就使射线PA通过离P最近的那个格点。

明柯夫斯基定理与汉默第一定理中的区域都要求中心对称。中心对称图形的对称中心和重心是重

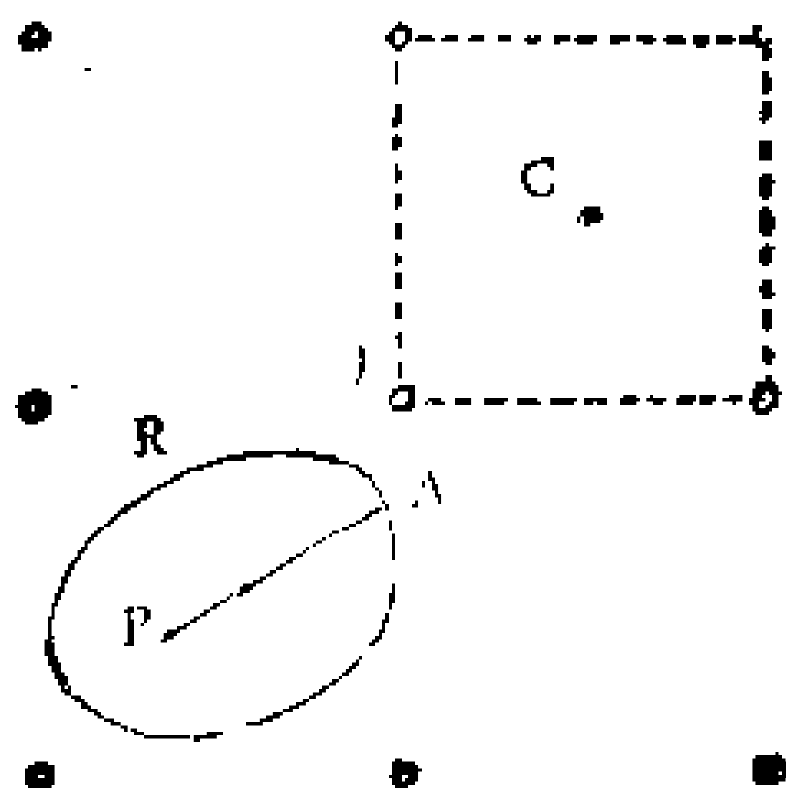


图 36

合的。可以完全等价地用重心位于格点的区域来陈述上面的定理。要是去掉中心对称这个条件，这些定理便不再成立。然而使我们感到惊异的是，把面积条件增加一个因子1/8，定理又可以成立了：

重心在格点、面积$>4\frac{1}{2}$的闭凸区域至少另外还含有两个格点（E. Ehrhart，〔1〕）；

重心在格点，面积$>9\pi/8$的闭凸区域可以绕重心旋转至某一位置，使得它至少再含两个格点（此定理属于汉默，见上面提到的AMM，1968中的文章）。

请读者欣赏一下短文〔2〕吧。

参考文献

1 E. Ehrhart , Une ge′ne′ralisation du théorème de Minkowski, Comptes Rendus, 240 (1955), 483—485.

2 P.R.Scott, Lattice Points in Convex Sets, Math.Mag. May 1976, 145--146.

三十、联立丢番图方程

求下列方程组的正整数解：

$$a^3-b^3-c^3=3abc,$$

$$a^2=2(b+c).$$

解答 因为$3ab$是正的，所以a^3必定比b^3，c^3还大，于是有

$$b<a\ ,\ c<a.$$

相加得$b+c<2a$，故$2(b+c)<4a$。从第二个方程便得

$$a^2<4a,\ a<4.$$

但第二个方程还告诉我们，a是一个偶数.这样一来a就只能是2，而比它更小的b和c只能是1了。

三十一、反射切线

A，B是直线m同侧的两个圆．求作A的一条切线，使其从m反射后也与B相切(图37)

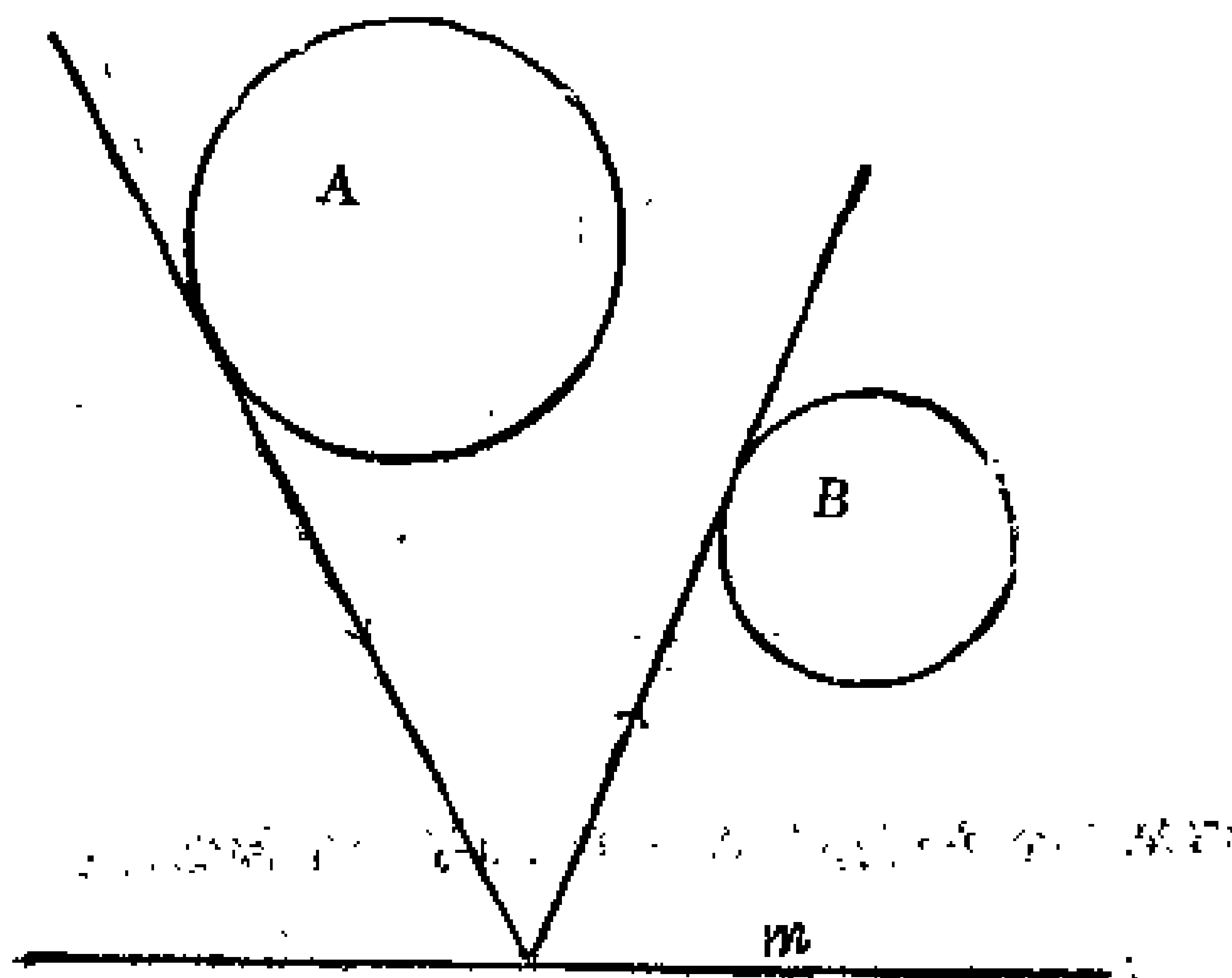


图 37

解答 如图38，把B映射到m的另一侧得到像B'，A和B'的公切线就会给我们提供四个可能的解答（B'的切线映射到m的另一侧便成了B的切线）．

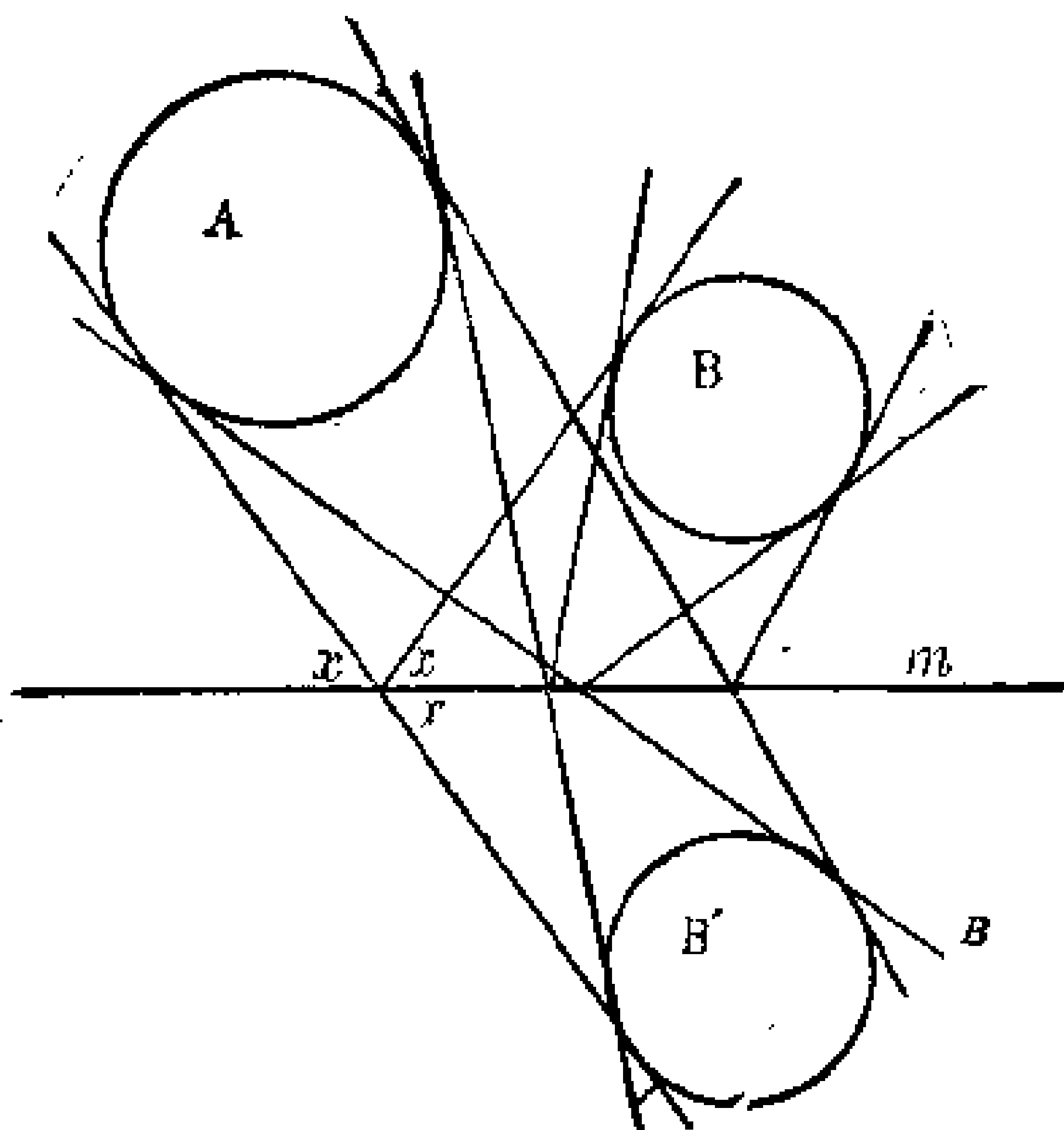


图 38

三十二、拆得干净利落的方格棋盘

如果从普通8×8格子棋盘上把全部黑方格拆除，棋盘上就连一个2×1的多米诺骨牌也放不下了。但是不管把哪个黑方格安还原，棋盘上就放得下多米诺骨牌了。用这种拆法去掉黑方格后的棋盘算是拆得干净利落。

其实要拆毁棋盘不必非把全部黑格子（或全部白格子）拆走不可，只消把黑白方格作不同配合就行了。32张多米诺骨牌显然排满了整个棋盘（图39），只要这32对相邻方格的每一对格子不拆散，

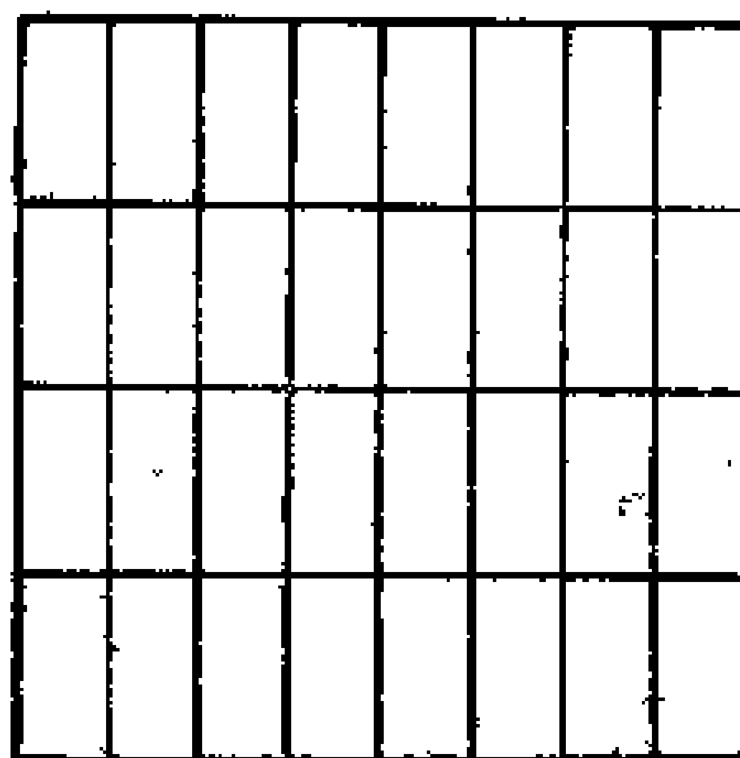


图 39

棋盘就能够放得下多米诺骨牌。因此要使棋盘无

用，至少必须去掉32个方格。

另一方面，可以看出，要把棋盘拆得干净利落可以去掉不止32个方格。不消说有许多整块整块去掉的作法会把棋盘毁坏。关键在于把任何一个去掉的方格还原后，棋盘就可以放一个多米诺骨牌。要照顾到这个颇为苛刻的限制条件，能够取消的方格的最大数目大得惊人。试求出这最大个数。

解答 图40中的棋盘内有一些画上阴影线的方

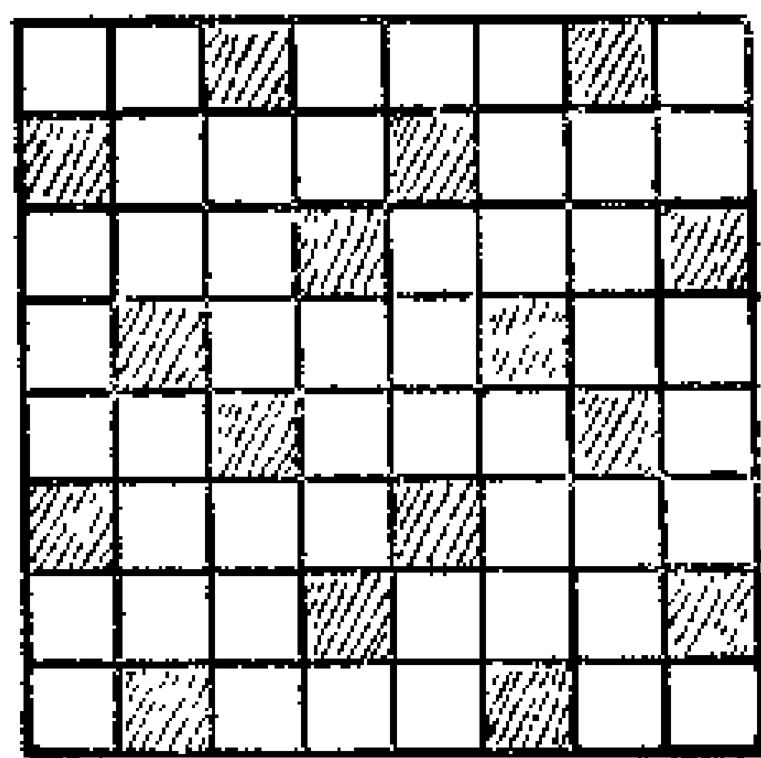


图 40

格。从图中可以看出，拆得干净利落的棋盘只能保留16个方格。我们要指出，少于 16 个方 格就不行了，为此我们证明，只要一次去 掉 的 方 格数超过48，就至少会有这样一个方格（记为X），使得把它放还棋盘后，并不能恢复棋盘安放一个多米诺骨牌的能力。

要是在每个1/4块棋盘上保留多达4个的方格，那么总共至少可留下16个方格。在不足16个方格的棋盘上必定有某个1/4，比方说左上角的1/4保留的方格个数不超过3.因此，这四分之一棋盘上的某1/4块必定早已被拆走.这四分之一棋盘上的空着的四分之一可能有A，B，C，D四种位置，我们现在依次来考察一番（图41）。

（a）如果空着的四分之一是A，那么就把拐角处的方格X放还原，仍旧不能使棋盘容纳一块多米诺骨牌（图42）

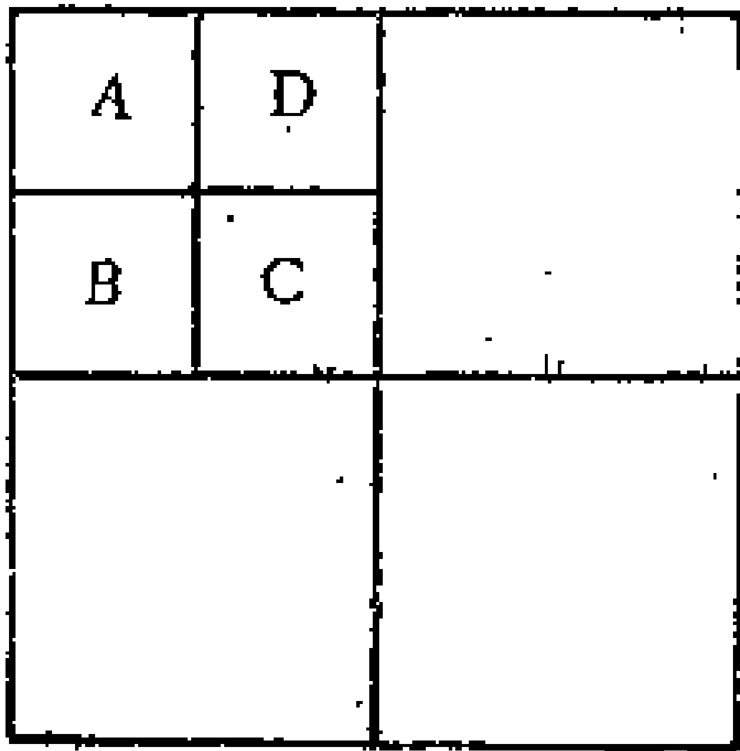


图 41

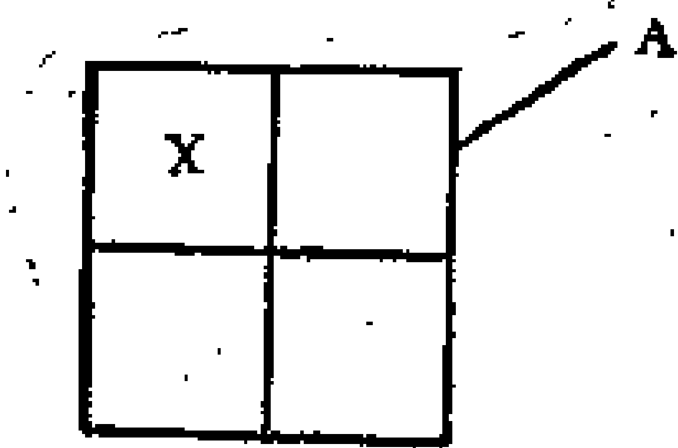


图 42

（b）假定B这一块中的E，F，G，H四个方格都划去了，并且B周围的方格已经照图43那样标上了记号。那么，除非保留方格P，否则即使把E放还原，棋盘也无法容纳一块多米诺骨牌，我们找寻不起作用的X的工作便宣告结束。因此假定P是保留下来了的。这样，要拆毁棋盘，相邻的方格Q早

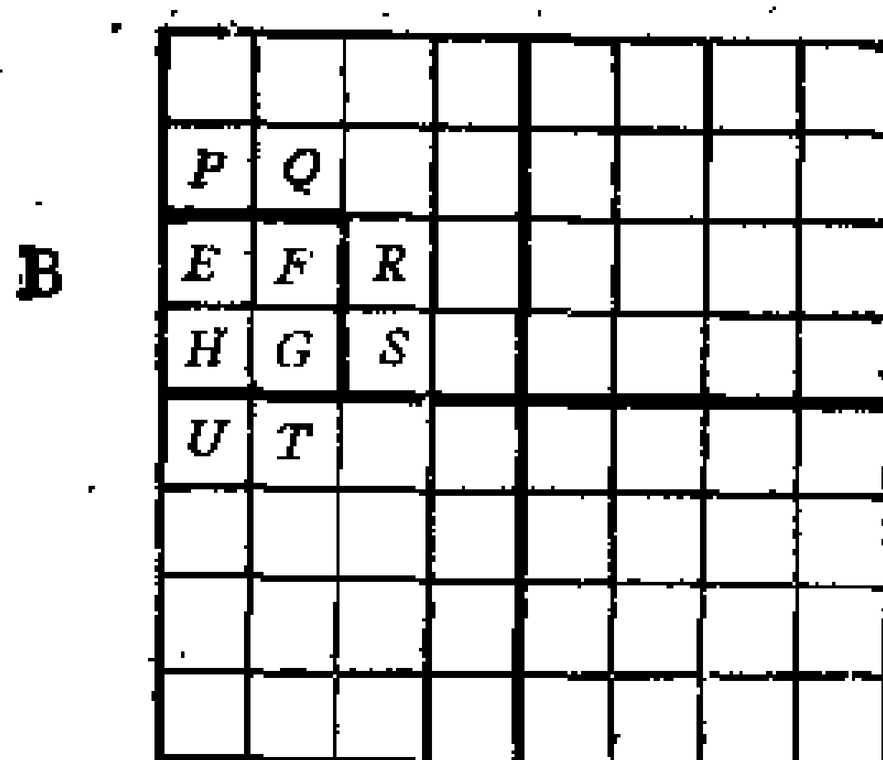


图 43

就必须抹掉。

F周围是空方格 Q, E, G。这等于说 要么保留R, 要么 $X\equiv F$, 找寻工作结束。假设保留R, 那么相邻的S早该抹掉。考察一下 G, 我们找到无效的 $X\equiv G$, 除非保留 T, 而这样就要求必须抹掉U。总之, 要么我们找到了合适的 X, 要么得出消U的结论, 而这又意味着与H相邻的三个方格都不在了, 因此$X\equiv H$. 从而无论怎样都找得出X.

相同的另一个四分之一, 即D, 可以完全一样地解决.

(c)剩下来该考察的只有在位置C的空白块了。把图43的标记增加, 如图44所示。C部分含有R, S, W, V四个方格。

先来看一看R。因为V、S已抹掉, 故F、Y中必须保留一个, 不然就有$X\equiv R$。由于F与Y对C的位置关系相同, 两种情况是一样的。为确定起见,

O	I						
P	Q	Y	Z				
E	F	R	V	J			
H	G	S	W	K			
		N	M				

图 44

假设保留的是 Y。于是我们可以像上面围绕B那样地围绕 C 进行研究，发现一个无效方格 X（V，W 或 S）或者发现必须保留 Y，J，M，G，抹掉 Z，K，N，F。因此我们要么得到 X，要么必须在棋盘左上方的四分之一保留方格 Y 与G。但是请大家回忆一下，在这四分之一棋盘上总共至多保留了三个方格。

如果有两个是 Y 与G，那么至多只能再有一个方格保留在棋盘的这四分之一块上。

如果外角O也留下来了，那就必须抹掉P，E，H，F，因此$X=E$。如果不保留 O，可以完成推理如下：若保留 P，则 $X=I$。于是设P被抹掉，因为保留了Y，故必须抹去Q。要是E也被抹掉了，便得$X=P$（因为O已不在）。如果E保留了下来，就有了三个留下的方格Y，G，E，因此$X=I$。

三十三、雪球

有个男孩堆了两个雪球，一个的直径比另一个的大一倍。他把雪球带进暖和的房间，让他们融化。由于雪球只有表面接触暖空气，所以假定融化速率与表面积成比例，当大雪球体积的一半化掉时，问小雪球还剩多少？

解答 我们先说明，当假设雪球以正比例于表面积的速率融化时，可以推出下述重要结果：不论雪球大小如何，半径变小的速率是个常数。作为一项推论，知道两个半径缩小相同的量。

球的体积与表面积分别是 $V=4\pi r^3/3$ 与 $S=4\pi r^2$。用t代表时间，融化速率为

$$\frac{dv}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$

因与$S=4\pi r^2$成正比，故

$$4\pi r^2\frac{dr}{dt}=k4(\pi r^2)$$

式中k为比例常数，由此得

$$\frac{dr}{dt}=k,$$

证明了前面的论断。

设融化前的半径为$2r$与r，则大雪球的体积是

$$V=\frac{4}{3}\pi(2r)^3=\frac{32}{3}\pi r^3.$$

融化了一半以后体积变成

$$\frac{16}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt[3]{4}r)^3,$$

这表示半径成了$\sqrt[3]{4}r$。因此两个雪球半径各缩短了$(2-\sqrt[3]{4})r$。于是，小雪球剩下的半径长为

$$r-(2-\sqrt[3]{4})r=r(\sqrt[3]{4}-1).$$

从而小雪球还剩下

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3(\sqrt[3]{4}-1)^3,$$

这几乎是原体积的1/5，因为$(\sqrt[3]{4}-1)^3\approx0.2027$。

三十四、从1到10亿

把1到10亿全部写出来，所用的数码之和是多少？

解答 把0算上，我们共有5亿对数偶：

(0；999999999)，(1；999999998)，

(2；999999997)，…，

(499999998；500000001)，

(499999999；500000000)，

其中，每一对数偶的数码之和是 $9\cdot 9=81$。把略去未算的（1；000000000）中的1算入和内，于是所求的和为

$$500000000\ (81)\ +1=40500000001.$$

三十五、邻接非交叠

单位正方形

把平面上的单位正方形S的位置固定好．试问：放近S与S接触但不交叠的非交叠单位正方形的个数，最多有多少？（图45）

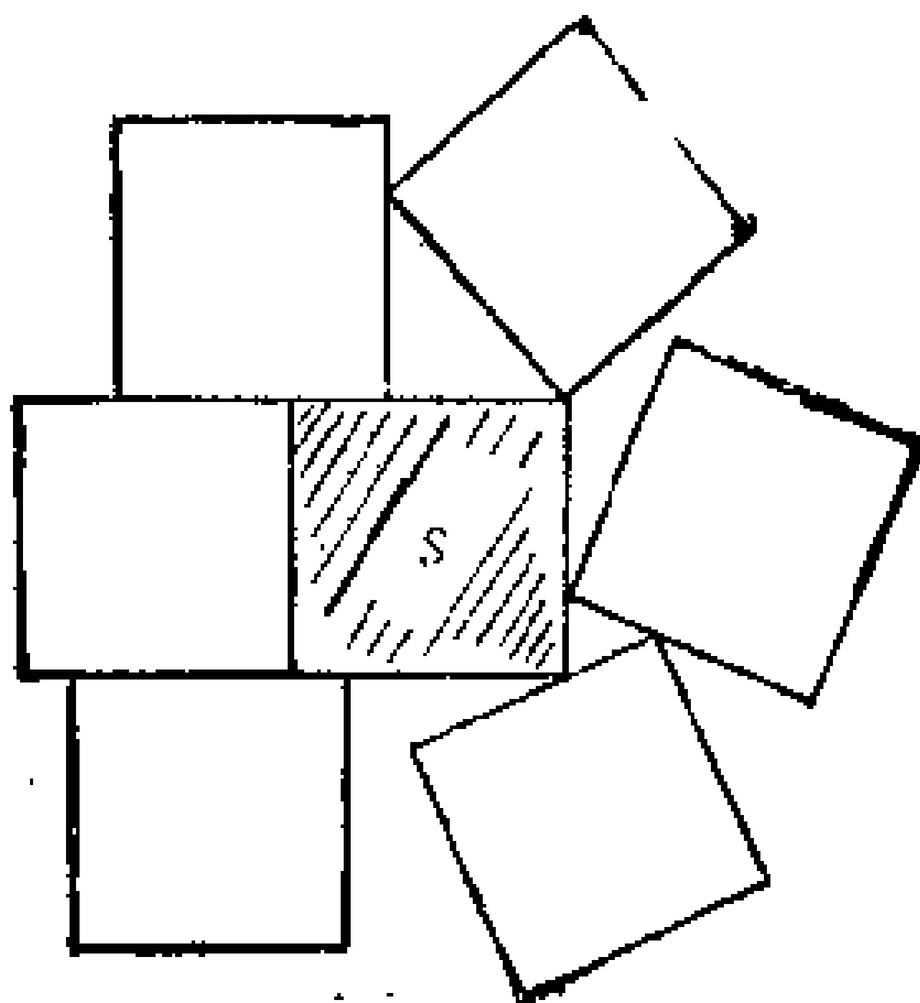


图 45

解答　3×3方格棋盘上有8个相邻接的正方形，看来这肯定是把正方形排得最紧凑的排法（图46）．长时间都觉得是这么一回事，但总是证明不出来．有一天我浏览美国数学月刊1939卷时突然发现J.W.T 扬（Young）的精采证明，使我惊喜欲狂．

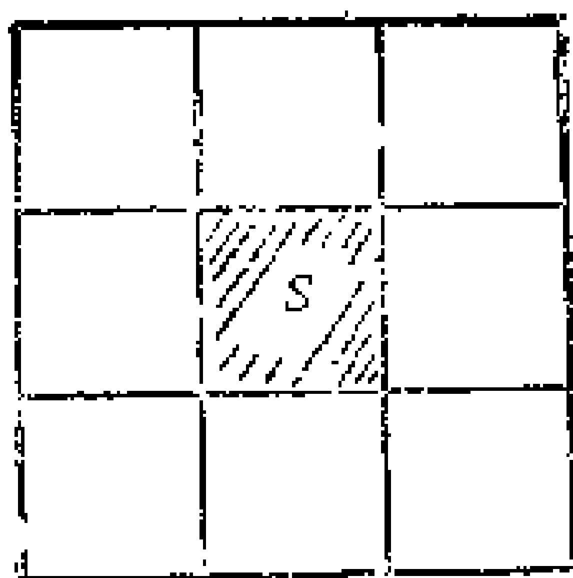


图 46

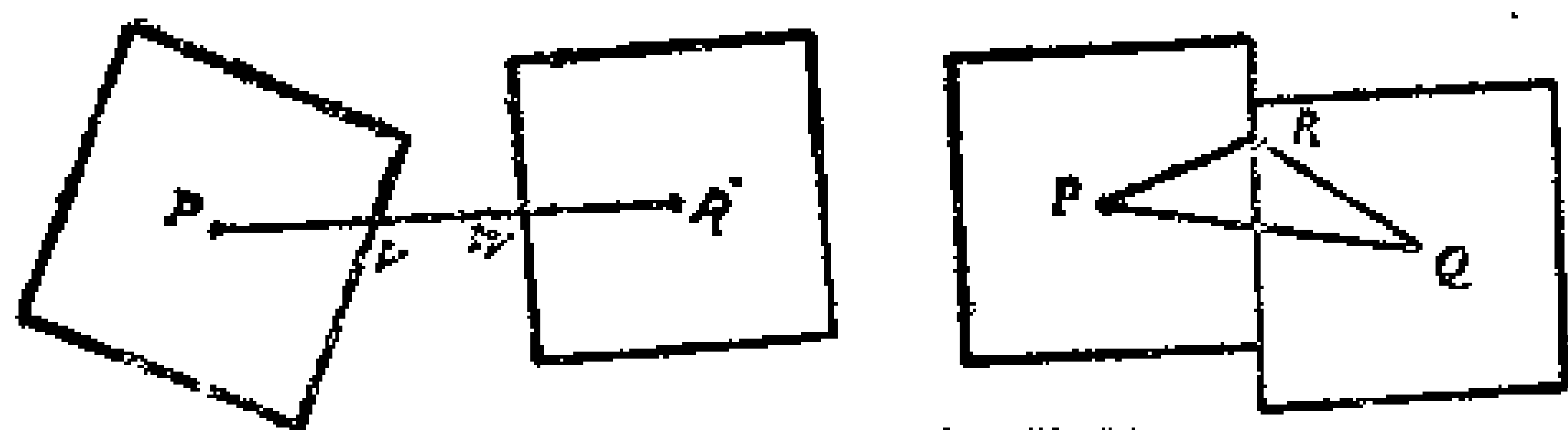
从图47中容易看出：

(i) 两个非交叠单位正方形中心距离 $\geqslant 1$，而

(ii) 两个相邻接的单位正方形的中心距离不大于$\sqrt{2}$.

(i)　　　　　　　　(ii)

（至少有一个接触点 R）



$PV \geqslant \frac{1}{2}$，$WR \geqslant \frac{1}{2}$，

$PQ \leqslant PR + RQ \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

故　$PR \geqslant 1$　　$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\text{是对角线的一半长}\right)$

图 47

设固定的正方形S的中心是O，用A、B表示与S邻接的某两个正方形的中心（图48）。令$OA=x$，$OB=y$，$AB=t$。

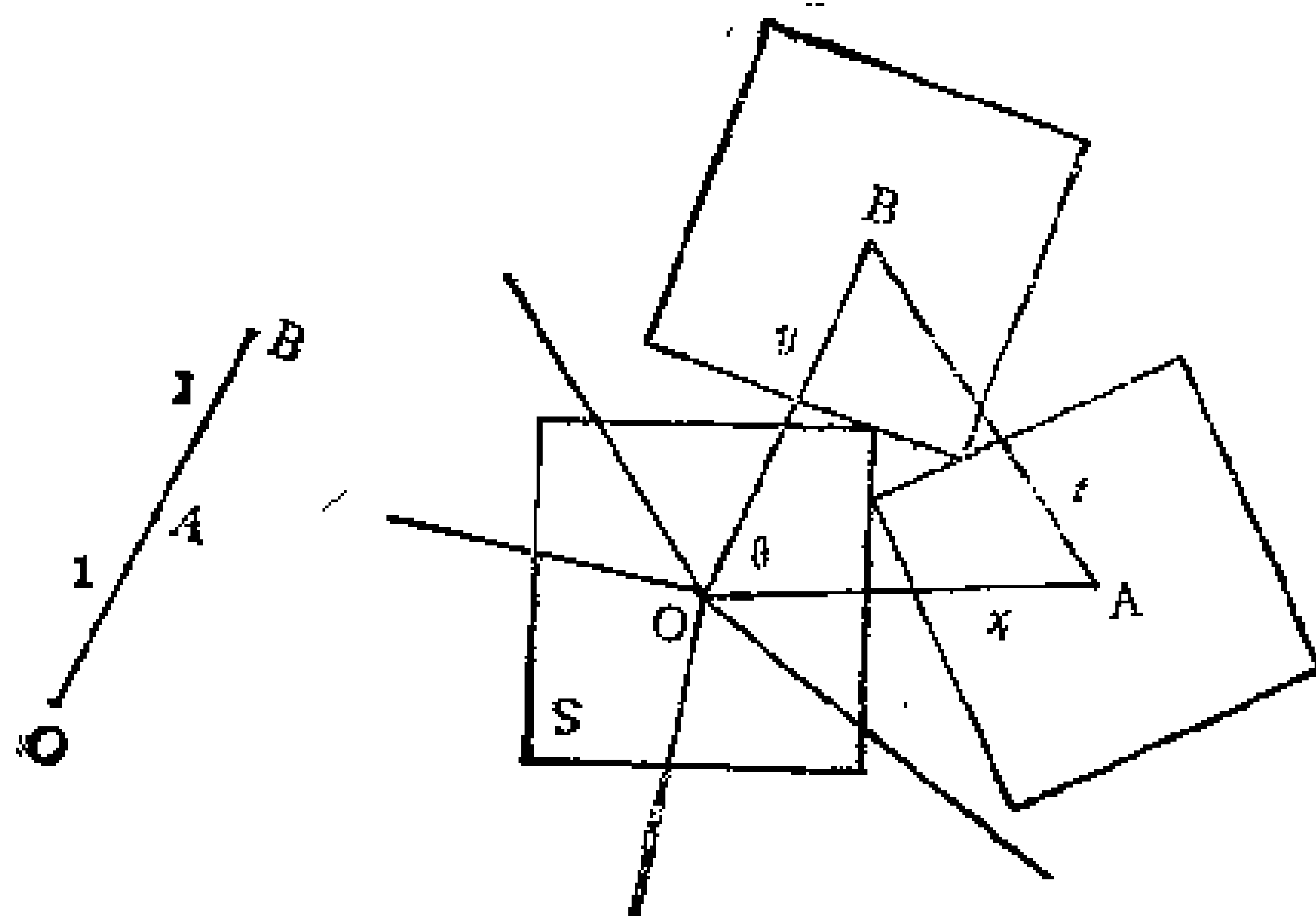


图 48

根据上面（i），（ii）两条性质知道

$x,\ y,\ t\geqslant 1$；　　　　$x,\ y\leqslant\sqrt{2}$.

中心为A，B的正方形之间可能会有空隙，因此t可能会$>\sqrt{2}$。由于没有任何正方形相交叠，我们的确有$t\geqslant 1$。

要是O，AB（就设它们按此顺序）共线，那么$OB=y$至少必须为2，这就超过了其上限$\sqrt{2}$。因此，OA，OB是从O发出的不同两条线（图48）。于是，把O与所有和S邻接的正方形的中心联接起来就形成一把扇，扇脉是过O的不同的线，每个正方形有一根。

现在假定OA和OB是扇图中的相邻两条（脉）线，并用θ表示它们在O点处的夹角（图48）．在$\triangle OAB$中利用余弦定律得

$$t^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta,$$

由此得

$$\cos\theta=\frac{x^2+y^2-t^2}{2xy}.$$

因为$t\geqslant 1$，所以

$$\cos\theta\leqslant\frac{x^2+y^2-1}{2xy},$$

我们用$f(x, y)$表示上式的右端．前面已经提过，$1\leqslant x, y\leqslant\sqrt{2}$，因此$f(x, y)$是正的．我们接着要证明，对于所考虑的$x$和$y$，$f(x, y)$决不大于3/4．

读者如果不熟悉偏导数，可以读附录中的详细初等推导。我们有

$$f_x=\frac{2xy(2x)-(x^2+y^2-1)(2y)}{(2xy)^2}$$

$$=\frac{x(2x)-(x^2+y^2-1)}{2x^2y}=\frac{x^2-y^2+1}{2x^2y}.$$

同样还有

$$f_y=\frac{-x^2+y^2+1}{2xy^2}.$$

当$1\leqslant x, y\leqslant\sqrt{2}$时，显然$f_x$与$f_y$都是非负的．因此当$x$与$y$增大时$f$的值不减小，这意味着$f(\sqrt{2},$

$\sqrt{2}$）是所考虑的所有$f(x,y)$中的最大值．换句话说就是

$$f(x,y)\leqslant f(\sqrt{2},\ \sqrt{2})=\frac{2+2-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{4}.$$

因此，OA与OB的夹角θ满足

$$\cos\theta\leqslant\frac{3}{4}.$$

从查表知道$\cos 40^\circ=0.76604\cdots$．因此

$$\cos\theta<\cos 40^\circ.$$

这说明$\theta>40^\circ$．由此可知，从O点射出到达相邻接的正方形中心的射线，扫完360°，还用不完9个这种角θ，$\theta>40^\circ$．因此，相邻接的正方形最多8个．

叶什瓦大学的D·J·纽曼（Newman)和W·E·外斯卜隆（Weissblum）在美国数学月刊（1962年，808页）上提过一个类似的但浅得多的问题：

平面上有六个闭圆，任何一个都不包含其它圆的圆心．试证明这些圆不可能有公共点．

解答　假设有一个点O是这些圆的公共点．把点O与六个圆心联接，在O处形成一个扇形线束．如果有两个中心A、B在过O的同一射线上，那么由于这两个圆都包含O，显然其中一个圆包含另一个圆的圆心（矛盾！）．因此，在扇形线束中含有6条不同的线（图49）．

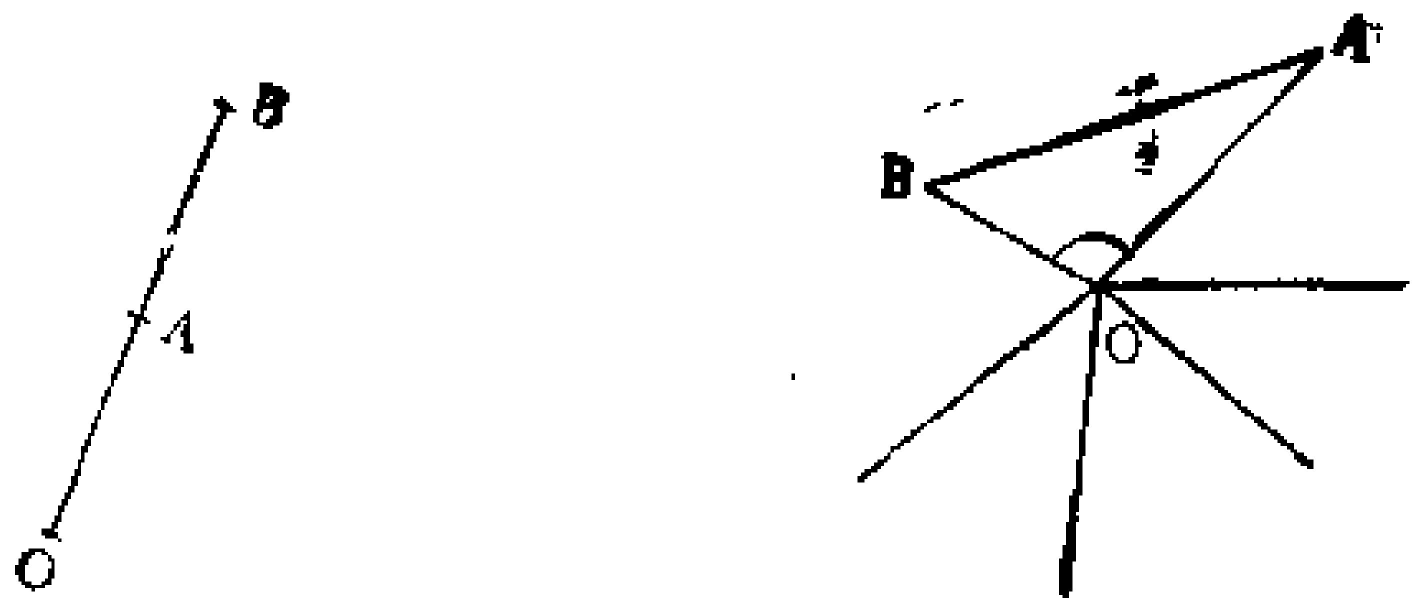


图49

令A与B表示这样的两个中心，它们使得OA, OB在扇形线束中相邻. 用r表示圆心为A、B的圆中较大的半径（若两圆相等，就表示共通值）. 由于任何圆不得包含其它圆的 圆心，故AB必定大于r. 但是以A、B为圆心的 两个圆都包含O，OA与OB都不可能大于r. 于是在$\triangle OAB$中，AB肯定是最长边，并且$\angle AOB$大于其余两个角，因而

$$\angle AOB > 60°,$$

这就意味着 6 条线形成的扇包含了比$6(60)=360$度还大的角，而这是不可能的。

附录 函数 $z=f(x, y)=(x^2+y^2-1)/(2xy)$ 的图像是一张曲面（图50）. 我们感兴趣的只是xy平面上正方形 $1\leqslant x, y\leqslant\sqrt{2}$ 正上方 的G这一部分。

令$K(a, b)$表示正方形内任意一点，$P(a, b,$

图 50

z) 表示K的正上方G上的相应点、考虑正方形中与K的纵坐标相同的那些点组成的直线L. 过L且垂直于xy平面的平面π与G交于一条曲线C。由于C的全部点都在G上，故点的坐标之间有下列关系：

$$z=\frac{x^2+y^2-1}{2xy}.$$

但它们又都在平面π上，故都有$y=b$.因此对于曲线C，我们得到

$$z=\frac{x^2+b^2-1}{2xb}.$$

这是单变量x的函数，曲线C在P点的切线PT的斜率就是$\frac{dz}{dx}$在P点的值. 化简后得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{x^2-b^2+1}{2bx^2}.$$

因为$x\geqslant 1$，故$x^2+1\geqslant 2$，又因为$b\leqslant\sqrt{2}$，所以分子

$x^2-b^2+1\geqslant 0$. 因为分母是正数，所以曲线C在每点的切线率斜都是非负的. 这就是说，在沿着曲线C往x增大的方向移动时，z的值不会减小. 因此L的端点M在G上对应了一点，这点离xy平面的距离与L正上方的G上任一点离xy平面的距离至少是同样远.

将直线L与平面π平行于y轴移动，类似地得到一条曲线C'，由下式表示

$$z=\frac{a^2+y^2-1}{2ay}.$$

对C'上的点有

$$\frac{dz}{dy}=\frac{-a^2+y^2+1}{2ay^2},$$

对所考虑的y与a，上式也是非负的. 因此，保持x不变而让y增加，这样在G上移动时，距下面的xy平面至少是同样远（即y增加时，x的值不减）. 由此得出结论：从正方形内任意一点$K(a, b)$出发，沿着L到M，然后沿正方形的边到N，那么，相应的G上的点H距xy平面最远（x值最大）. 因此，坐标为$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$的点$N(x, y)$就是本题中正方形内使$f(x, y)$取最大值的(x, y). 这个最大值是

$$\frac{2+2-1}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{4}.$$

三十六、一个丢番图方程

令a, b, c, d为整数，$a\neq 0$. 证明：只要$bc-ad\neq 0$，方程

$$axy+bx+cy+d=0$$

只有有限多个整数解(x, y).

解答 原方程乘a得

$$a^2xy+abx+acy+ad=0,$$

即

$$(ax+c)(ay+b)=bc-ad.$$

这表明$(ax+c)$和$(ay+b)$都是$bc-ad$的因子. 因为$bc-ad\neq 0$，它只有有限多个因子，故$ax+c$与$ay+b$只能有有限个可能值，x与y也如此.

我们知道，$axy+bx+cy+d=0$的图是一条双曲线. 如果$bc-ad=0$，则方程化为

$$(ax+c)(ay+b)=0,$$

双曲线退化成一对平行于坐标轴的直线. 显然，方程的整数解对应于图上的格点. 因此即使$bc-ad$

$=0$，方程也只有有限多个整数解，除非另外a还整除c或b，这时退化曲线的一条直线与（平行于坐标轴的）格子线重合．

下面介绍的简捷解法是我的同事勒罗依·狄开（Leroy Dickey）指出的．$axy+bx+cy+d=0$所表示的双曲线正好有平行于坐标轴的两条渐近线．可以看出事实的确如此，因为平移变换

$$x=X-\frac{c}{a},\ y=Y-\frac{b}{a}$$

把方程变成

$$a\left(X-\frac{c}{a}\right)\left(Y-\frac{b}{a}\right)+b\left(X-\frac{c}{a}\right)+c\left(Y-\frac{b}{a}\right)+d$$

$aXY+k=0$，k是常数，

从而得到$XY=$常数，这是双曲线的标准方程，其渐近线是坐标轴．因此，随着双曲线向其渐近线靠拢，会出现这样一个时刻，其时双曲线最后一次与一条格点线相交，此后，就一直处在一对相邻的格点线形成的通道里．即使渐近线与一条格点线重合，情况也如此，因为双曲线与其渐近线不相交．

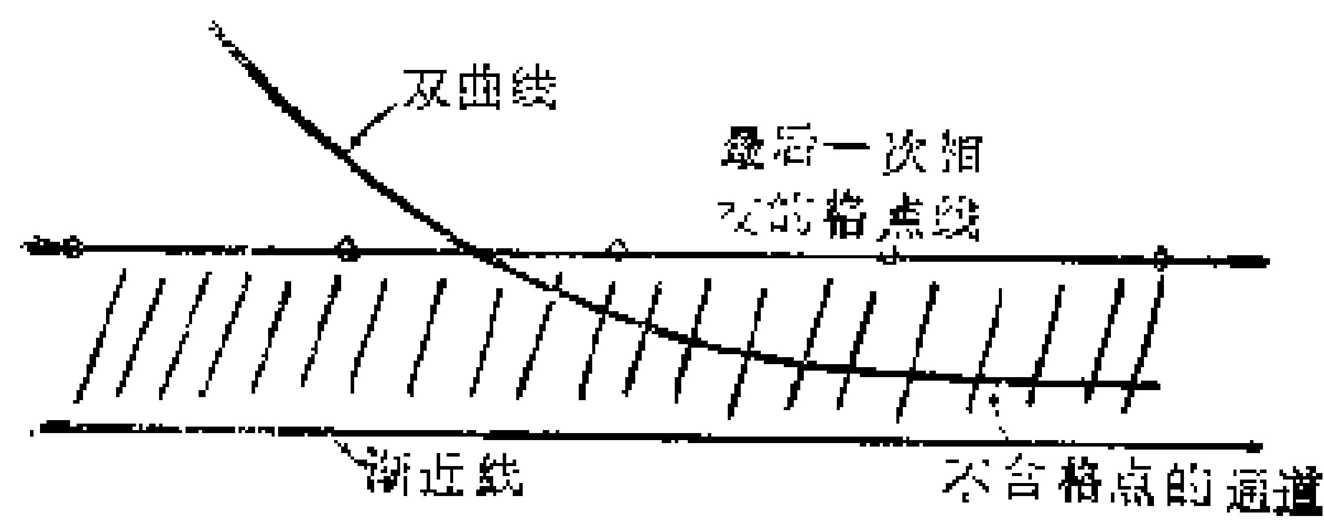


图 31

一旦进入这种通道里，曲线的无限长的尾巴再也碰不到格点了（图51）。因此被双曲线碰着的格点都在平面的有限部分内，从而个数也有限。

三十七、斐波那契数列

自然数的数列

$\{f_n\}$：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……，

其中$f_1=f_2=1$，$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$（当 $n>2$时），叫斐波那契（Fibonacci）数列，这是数学中尽人皆知的数列之一．真的，它的特点、它的推广多极了，所以有一本叫《斐波那契季刊》的杂志，专门刊登研究斐波那契数列的文章和有关内容．

我们现在的问题只是想知道，不超过已知自然数N的斐波那契数列的项有多少？

解答 一百多年前就已经知道斐波那契数列的第n项是

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

（这个公式的简捷证明，请参看 Ross Honsberger: Mathematical Gems, vol. 1, Dolciani Mathematical Expositions, Mathem-

atical Association of America, pp.171—172.①）$\sqrt{5}$约等于2.2，

故

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx-0.6.$$

因此$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$随$n$为偶为奇而分别为正为负，当$n=1,2,\cdots\cdots$时，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\text{之值}<\frac{1}{2}，\text{由于}$$

$$\left|-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right|<\frac{1}{2},$$

又f_n为整数，由表示f_n的公式知道，f_n必定是最接近

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

的那个自然数．因此决不会有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=N+\frac{1}{2}.$$

所以对斐波那契数$f_n\leqslant N$，必然有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n<N+\frac{1}{2}$$

①有中译本，江嘉禾，《数学瑰宝》，第一辑，四川教育出版社——译者

（以免最近的整数f_n超过 N）．反之，容易看出，如果

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n<N+\frac{1}{2},$$

则最近的整数必然 $\leqslant N$．因此，$f_n\leqslant N$ 的充要条件是

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n<N+\frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n<\left(N+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5},$$

$$n\cdot\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$<\log\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\},$$

$$n<\frac{\log\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\}}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

很容易看出，上式右端的对数比值决不是整数，否则，如果

$$\frac{\log\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\}}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}=k\text{（整数）},$$

则

$$\log\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\}=k\cdot\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k,$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k=N+\frac{1}{2},$$

与前面的结果矛盾。

因为n是整数，所以与n的最大许可值对应的$\leqslant N$的最大斐波那契数是

$$n=\left[\frac{\log\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right\}}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\right]$$

的那一项，这里〔x〕表示不超过x的最大整数。由于斐波那契数列的最初两项是一样的，所以不同的斐波那契数的个数比n少1。

现在来考虑这样的问题：算出在1，2，3，…，n中不得选相邻二数的选法个数（空集——不选也算一个选法）。

用a_{n-1}表示1，2，3，…，$n-1$个数中的选法个数．考虑1，2，3，…，n的a_n个选法．每一个这种选法或者含n，或者不含n。若不含n，那就是1，2，3，…，$n-1$的a_{n-1}个选法之一；若含n就必须避开$n-1$（面为$n-1$与n相邻），这意味着这个选法的剩余部分是1，2，3，…，$n-2$的a_{n-2}个选法之一．当然有可能这个选法只含有n，这相当于在1，2，3，…，$n-$

2中不选（所以要把空集计算在内）．于是总计有

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

因为很容易算出$a_1 = 2$，$a_2 = 3$，所以数列$\{a_n\}$是2，3，5，8，……，$a_n = f_{n+2}$（斐波那契数列的第$n+2$项）．

三十八、厄尔迪什

不等式

设ON是以 O 为圆心的圆内的一条半径，它垂直于弦AB，并与AB交于M．P为优弧$\overset{\frown}{AB}$上不与N正对的任意一个点．PM与PN分别确定出圆上的点Q与弦AB上的点R（图52）．试证明RN恒大于MQ（令人惊异的是，快速猜测时许多人把MQ当成长的了）．

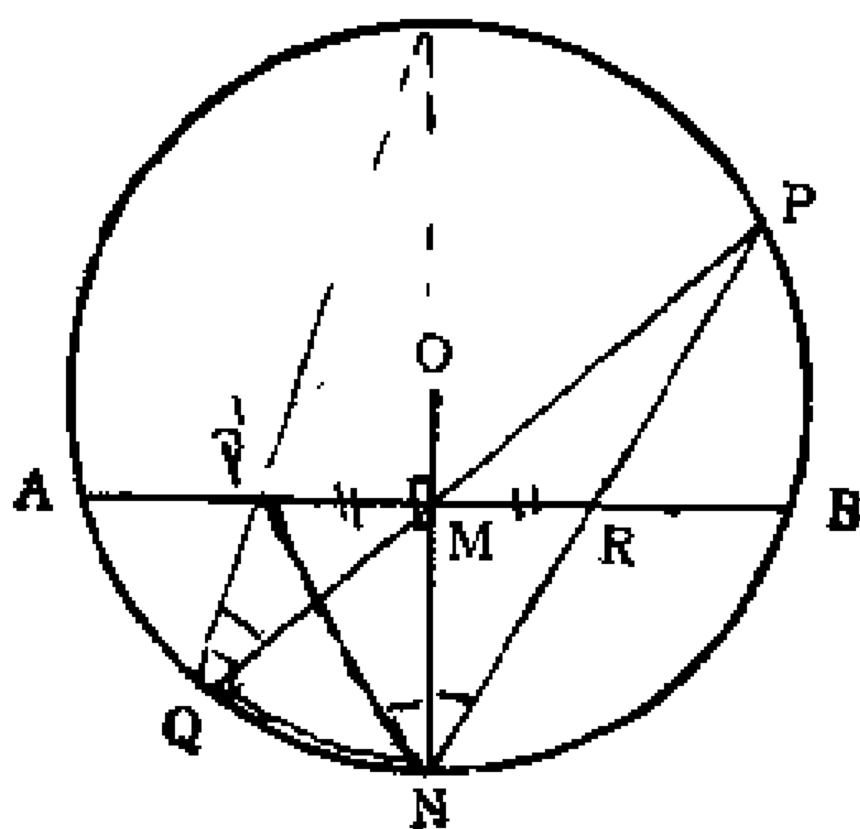


图 52

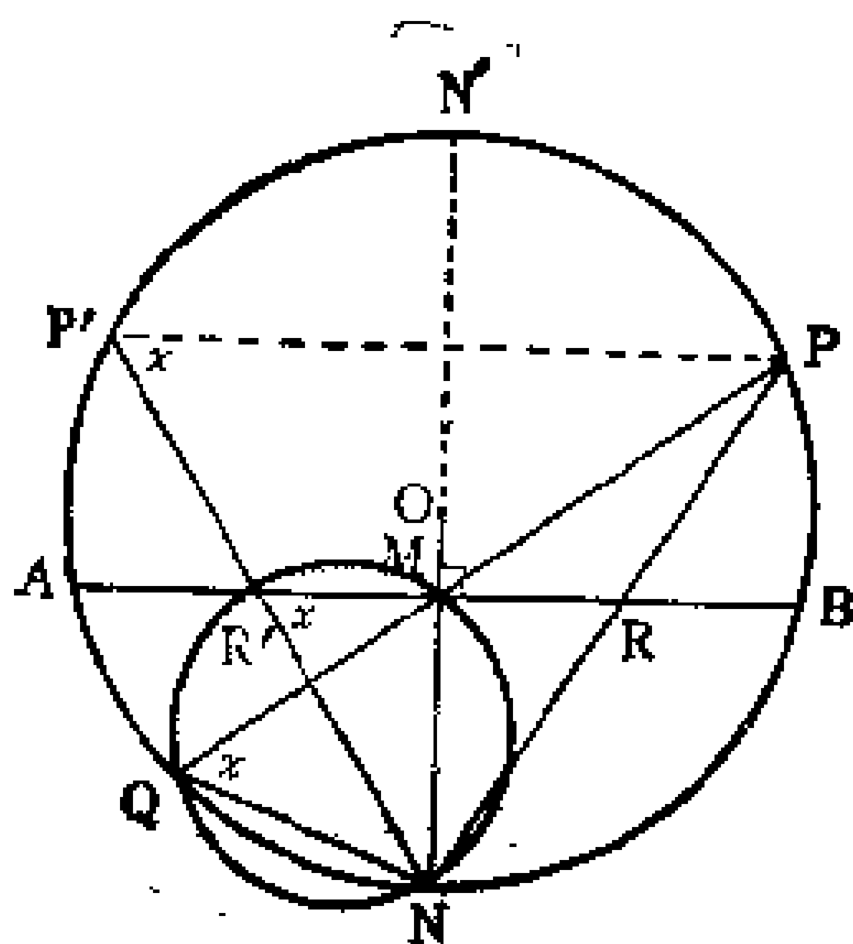


图 53

解答一（保尔·厄尔迪什） 令PN关于直径NON'的反射对称为$P'N$（图53）．因为AB垂直于

ON，所以这个反射把R变成了$P'N$与AB的交点R'，因此$RN=R'N$．

因PP'与AB都垂直于直径NON'，所以它们互相平行，从而得到两个相应的等角$NR'M$与$NP'P$．又因同弧所对圆周角相等，即$\angle NP'P=\angle NQP$，故$\angle NR'M=\angle NQM$，这表明四点Q，N，M，R'共圆。

弦$R'N$在这个圆的圆周上（M点处）对着一个直角，因此它是直径．然而，可以看出，弦QM所对的圆周角即$\angle MNQ$不是直角（因NN'是已知圆的直径，故$\angle NQN'$是直角，这表明在$\triangle QNN'$中$\angle QNN'$不是直角）．因此弦QM小于直径$R'N=RN$．

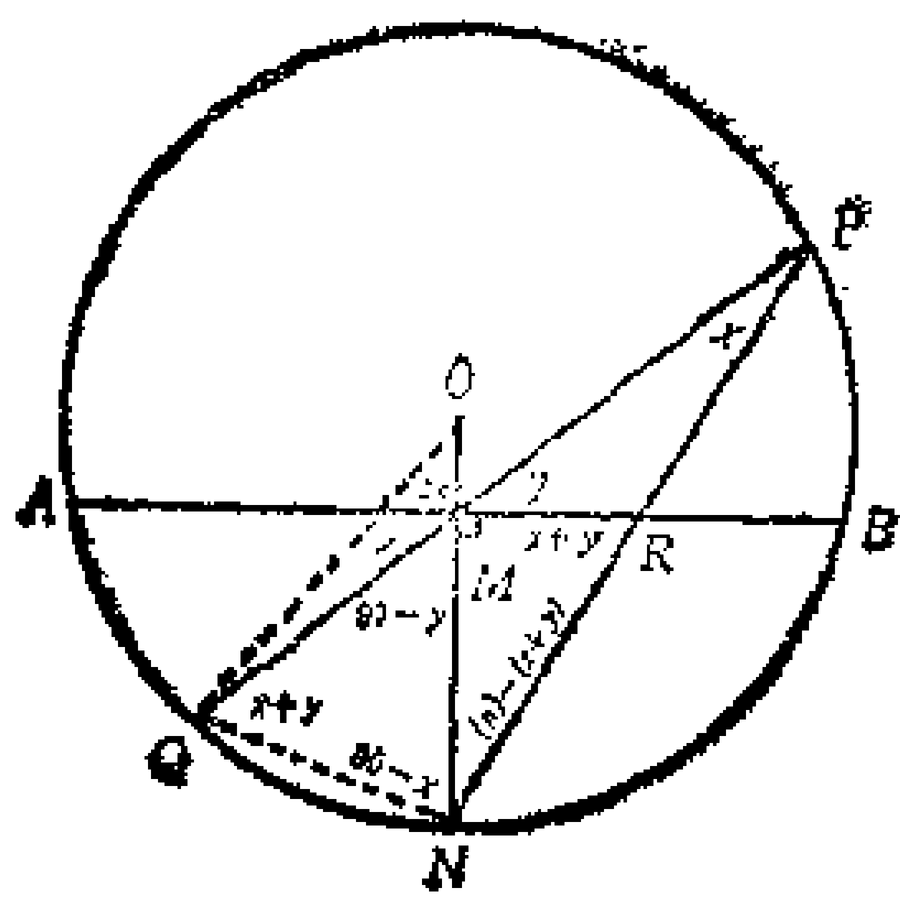


图 54

解答二〔安大略省斯卡勃罗的彼得·克里彭(Peter Crippen)〕

令x、y分别表示$\angle P$和$\angle PMR$(图54)，那末圆心角QON为$2x$，等腰三角形OQN的每个底角为$90^\circ-x$，图中其余的角容易算出，如图所示。

把正弦定律用于$\triangle MQN$得

$$\frac{QM}{\sin(90^\circ-x)}=\frac{MN}{\sin(x+y)},$$

用于$\triangle MNR$则有

$$\frac{MN}{\sin(x+y)}=\frac{RN}{\sin 90^\circ}.$$

因此

$$\frac{QM}{\sin(90^\circ-x)}=\frac{RN}{1}.$$

由于$\sin(90^\circ-x)<1$，故得$QM<RN$。

纽约市很有前途的高中学生马克·克莱曼在Math. Mag.①，49(1976)，217—218页上发表了一个很精辟的解答。

①数学杂志——译者注。

三十九、分格点

联结 $A(p, 0)$ 与 $B(0, p)$ 的线段通过 $p-1$ 个格点 $(1, p-1)$，$(2, p-2)$，……，$(p-1, 1)$．从这些点到原点O的 $p-1$ 条直线把$\triangle OAB$分成p个小三角形．靠外边的两个小三角形由于都有一条边是坐标轴，显然它们的内部不包含平面上的格点．如果p是素数，那么，从原点画出的这些分割线段没有一条包含格点（图55）．试证明：当 p 为素数时，$\triangle OAB$ 内的全部格点都在

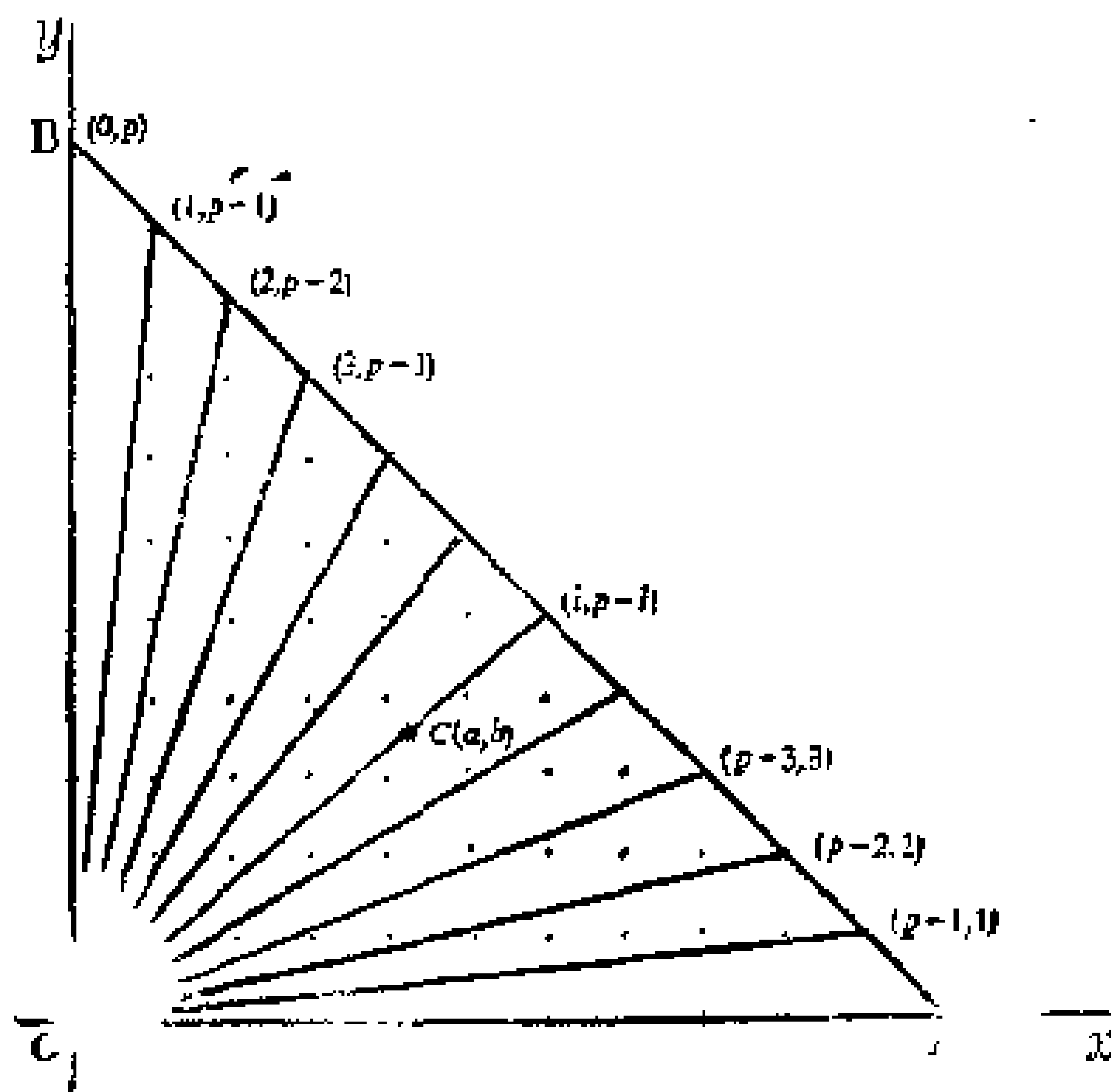


图 55

$p-2$个内侧小三角形的内部，并且每个内部小三角形所含格点一样多.

解答 令$C(a, b)$表示$\triangle OAB$内的一个格点，直线OC的斜率就是b/a. 如果C在一条分割线上，比如在联结点O与$(i, p-i)(1\leqslant i\leqslant p-1)$的直线上，那末$OC$的斜率又会是$(p-i)/i$. 因此$b/a=(p-i)/i$. 由于$i<p$且$p$为素数，故$i$与$p-i$互素. 然而$C$比$(i, p-i)$更靠近$O$，所以$a$与$b$分别小于$i$与$p-i$. 于是等式$b/a=(p-i)/i$表示：$(p-i)/i$没有化成最简，可以约成$b/a$. 这就与$i$，$p-i$互素相抵触了，因此结论应是$\triangle OAB$内的全部格点都落在$p-2$个内侧小三角形内部.

注意，AB被格点$(i, p-i)$所等分，因此所有小三角形面积相等. 因为每个顶点都是格点，我们可以用下面的匹克（Pick）定理来算面积.

匹克定理　顶点为格点（且自身不相交）的多边形的面积是

$$q+\frac{p}{2}-1,$$

式中q是多边形内的格点数，p是边界上的格点数（包括顶点和各边上的格点）. （匹克定理的优美证明，见参考文献.）

因为$(i, p-i)$与$(i+1, p-i-1)$之间没有格

点，我们发现每个内侧小三角形的面积是

$$q+\frac{3}{2}-1.$$

由于对所有内侧小三角形这式子都一样，所以 q 对它们也必定一样，这表明它们平分了$\triangle OAB$ 内部的格点.

q的值很容易计算。每个小三角形的面积是 $(1/p)(\triangle OAB)$，即

$$\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\cdot p\cdot p\right)=\frac{p}{2}.$$

因此

$$q+\frac{3}{2}-1=\frac{p}{2},$$

由此得

$$q=\frac{p-1}{2}.$$

参考文献

Ross Honsberger, Ingenuity in Mathematics, vol. 23, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, 27—31.

四十、完全数

古代希腊人发现，某些自然数 n 有很特别的性质：n的真因子之和正好等于 n自身．例如，$n=28$ 就有

$$1+2+4+7+14=28.$$

这样的数他们称为“完全数”．n 的全部正因子（包括n自己）的和表示成 $\sigma(n)$，如用这个算术函数$\sigma(n)$来表达的话，那末，若$\sigma(n)=2n$，则n是完全数．看来完全数是极其稀有的．头五个完全数是 6、28、496、8128、33550336，到1976年总共才知道24个完全数，最大的一个是$2^{19936}(2^{19937}-18)$，含6000多位数．

十八世纪时欧拉（Euler）证明了，每个偶完全数m可以表示成

$$m=2^{n-1}(2^n-1)\text{，式中}2^n-1\text{是素数．}$$

（关于L．E．狄克逊（Dickson）对这一结果的辉煌证明（1911），请看我的书《Ingenuity in Mathematics》（数学技巧），113页起，该书由美国数学协会出版，收入新数学文库第23卷．（后面要用的）下列两个简单结论也取自该书：

（i）若a与b互素，则$\sigma(n)$有乘法性：$\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$.

（ii）若2^n-1是素数，则指数n也是素数（124页）.

有了这番准备功夫，即可知道，本题就是要求我们找出所有的完全数n，对于这种n，要求$\sigma[\sigma(n)]$也是完全数.

解答 首先设n是奇完全数，则$\sigma(n)=2n$，因2与n互素，有

$$\sigma[\sigma(n)]=\sigma(2n)=\sigma(2)\cdot\sigma(n)=3\cdot\sigma(n)$$
$$=3(2n)=6n.$$

显然$6n$是偶数，若它也是完全数，则对某个素数p我们必定有

$$6n=2^{p-1}(2^p-1)$$

（p必为素数，因为2^p-1是素数）．然而因为n是奇数，故$6n$只含一个单因子2（在6中）．这意味着

$$2^{p-1}=2^1，从而p=2.$$

因此

$$6n=2(2^2-1)，故n=1.$$

但是1不是奇完全数，这是矛盾．因而不存在奇完全数n使得$\sigma[\sigma(n)]$也是完全数.

其次假设n为偶完全数．既为偶完全数，那末

对于某个素数p，n可以表为

$$n=2^{p-1}(2^p-1)，式中2^p-1为素数.$$

此时2与2^p-1互素，我们有

$$\begin{aligned}\sigma[\sigma(n)]&=\sigma(2n)=\sigma[2^p(2^p-1)]\\&=\sigma(2^p)\cdot\sigma(2^p-1)\\&=(2^{p+1}-1)[(2^p-1)+1]\\&\qquad\qquad(\text{因}2^p-1\text{是素数})\\&=2^p(2^{p+1}-1).\end{aligned}$$

这显然是偶数，倘若还是完全数，它就已经表成完全数的欧拉形式了，于是推知指数$p+1$必为素数. 因为p与$p+1$都必须是素数，而且它们相邻，所以只能是2和3. 因此

$$n=2^{p-1}(2^p-1)=2(2^2-1)=6$$

$$\sigma[\sigma(n)]=\sigma[\sigma(6)]=\sigma(12)=28.$$

因而$n=6$是唯一解.

四十一、四边形的边

试证明．若一个四边形各边边长都是整数（对某个长度单位而言），并且任何一边的边长整除其余三边长度之和，则这四边形有两边是相等的．

解答 假设任何两条边都不相等．用$S_1>S_2>S_3>S_4$表示各边的长度，以p表示周长．我们已知$S_i|p-S_i$，$i=1$，2，3，4．此时还有$S_i|p$．但是S_i除p商多少呢？

考虑最长边的长度S_1的情形．四边中任意三边之和大于第四边（从第四边的一端沿四边形走到另一端，另三边是"远路"）．因此S_1小于周长之半：$S_1<p/2$．然而S_1是最长边的长度，必然大于周长的四分之一）否则四边加起来也不足p）．所以

$$\frac{p}{4}<S_1<\frac{p}{2}.$$

这表明S_1除p之商大于2，小于4，因而它除p应商3，即 $S_1=\frac{p}{3}$.

因为$S_2<S_1$，故S_2除p的商必定比S_1除p的商要

大，这意味着$p/S_2 \geqslant 4$，即$S_2 \leqslant p/4$．又由于$S_3 < S_2$，所以$p/S_3 \geqslant 5$，即$S_3 \leqslant p/5$．类似有$S_4 \leqslant p/6$．因此，

$$\begin{aligned} p &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &\leqslant \frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6} = \frac{57}{60}p < p, \end{aligned}$$

这是个矛盾，故四边形必定有某两边是相等的．

四十二、算术级数中的素数

试证明：在公差小于2000的自然数算术级数中不可能多达十二个相邻项都是素数.

解答　设算术级数的n个相邻项

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,\ a+(n-1)d$$

都是素数，$n\geqslant 3$. 若$a<n$，则上面各项中必有一项为

$a+ad=a(1+d)$，这不是素数，因为a与$1+d$都比1大. 因此我们必有$a\geqslant n\geqslant 3$.

令p是小于n的素数，并设p不能整除d. 我们来考虑前p项

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots\cdots,\ a+(p-1)d.$$

让r_0，r_1，$\cdots\cdots r_{p-1}$表示p除上面各项所得的p个余数.由于每项都是素数，并且$p<n\leqslant a$（最小项），所以p除不尽任何项，故无一余数为零. 因为这p个余数都只是从$p-1$个非零余数1，2，$\cdots\cdots$，$p-1$取的，用重叠原则可以证明其中有两个相等，比如$r_i=r_j$（$i\neq j$）. 于是

$$a+id\equiv a+jd\ (\mathrm{mod}\,p),$$

$$(i-j)d\equiv 0 \pmod p).$$

换句话说，p整除$(i-j)d$．但p是素数且除不尽d，因而必然有$p|i-j$.然而i，j都是比p小的正整数，欲使$p|i-j$成立，唯有$i-j=0$，这就得出$i=j$这个矛盾．因此，素数$p(<n)$必除尽d．

$n=12$个相邻素数项就要求d被小于12的每个素数，即2，3，5，7，11所整数．因而d必然是$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310$的倍数，而这又超过了2000，于是得到要证的结论．

W·谢尔宾斯基（Sierpinski）的辉煌论著《Theoryof Numbers》（数论）（1964）中有许多这方面的有趣材料（121—125页）．例如，算术级数中的10个相邻项

199、409、619、……、$199+9(210)$

都是素数；又

$4943+k(60060)$，$k=0$，1，…，12

这13项都是素数．

要想算术级数的相邻$n=5$项都是素数，必须2与3能除尽公差d，因此d必须是6的倍数．$d=6$时我们有下面的例子：

5，11，17，23，29．

不过这也是$d=6$的算术级数中相邻5项均为素数的仅有的一例了．因为，在这样的级数中的任何相邻5项

$$a,\ a+6,\ a+2\cdot6,\ a+3\cdot6,\ a+4\cdot6$$

必然含有一项是5的倍数．我们有$a+i\cdot6\equiv a+i$ (mod5)．无论什么a都关于模5同余，$i=0$，1，2，3，4中必有一值使得$a+i\equiv0$ (mod5)．对素数项而言，必有一项就是5．事实上，5必然就是那首项（因为$5-6=-1$不能置于5前）结果便得到5，11，17，23，29．

四十三、关于

彻伐[1]线

假设BC是$\triangle ABC$的最长边．在此三角形内部任选一点O，AO、BO，CO分别交对边于A'、B'、C'．证明

$$OA'+OB'+OC'<BC.$$

解答 从三角形的顶点通过三角形到达对边的线段叫做"彻伐线"．显然从一个顶点所作的彻伐线的长度小于交于该顶点的两条边中的长边．因此，三角形的最长边比它的任何一条彻伐线都长，故BC比AA'、BB'、CC'都长．

令OX与OY分别平行于AB与AC，因此$\triangle OXY$与$\triangle ABC$相似（图56）．由于BC是$\triangle ABC$的最长边，所以其对应边XY也就是$\triangle OXY$的最长边，因而$XY>$彻伐线OA'．

令XS与YT分别平行于CC'与BB'，那末，$\triangle BXS$与$\triangle BCC'$相似．显然BC是$\triangle BCC'$的最长

---

[1] 为纪念意大利数学家乔万尼·彻伐（Giovani Ceva）而命名的线段——译者注．

故其对应边BX也是$\triangle BXS$的最长边．于是

$BX>SX=OC'$（在平行四边形$C'XSO$中）．

类似还有

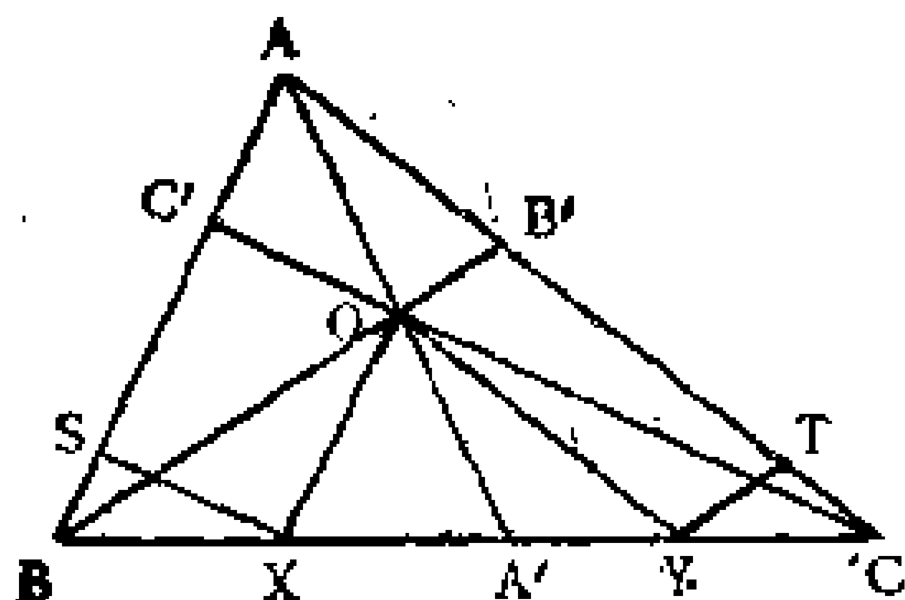


图 56

$YC>YT=OB'$．

相加得

$$OA'+OB'+OC'<XY+YC+BX$$
$$=BC．$$

刚才证明了$OA'+OB'+OC'<$最长边BC．现在假设AA'是三条彻仗线AA'、BB'、CC'中最长的一条，试证明更强的结论：

$$OA'+OB'+OC'\leqslant AA'$$

解答 设

$$\frac{OA'}{AA'}=x,\quad \frac{OB'}{BB'}=y,\quad \frac{OC'}{CC'}=z．$$

分别作AD、OE垂直于BC（图57），则$\triangle ADA'$与$\triangle OEA'$相似，因此

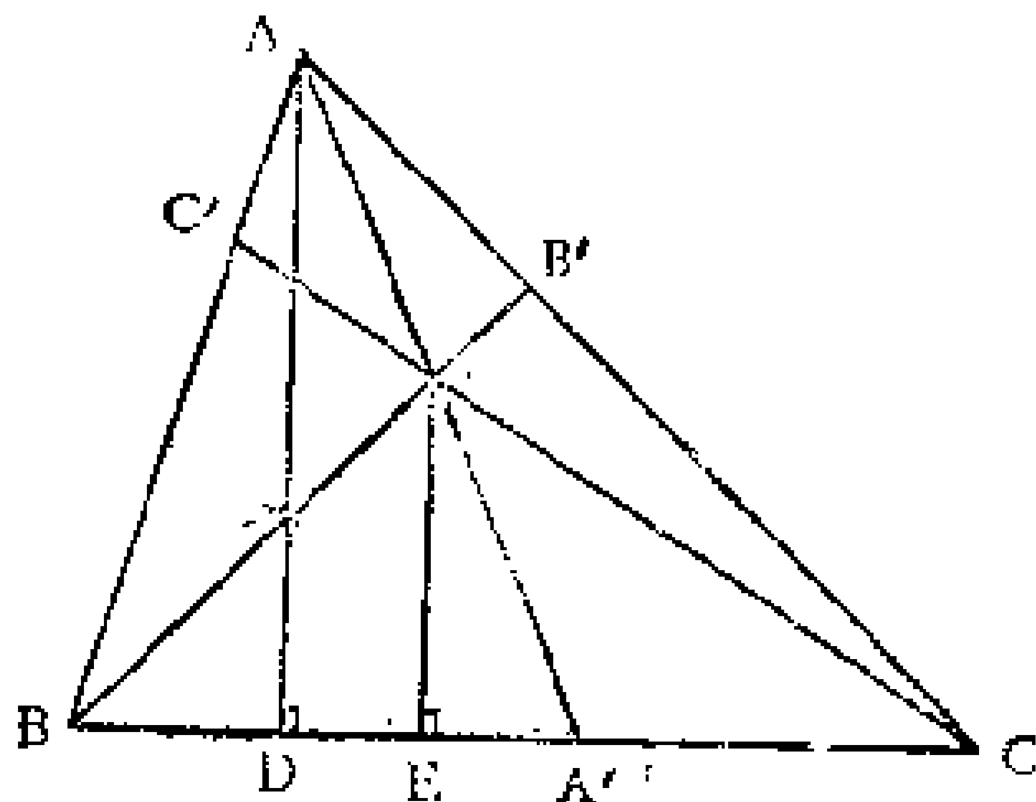


图 57

$$\frac{OE}{AD}=\frac{OA'}{AA'}=x.$$

而

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot OE}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD}=\frac{OB}{AD}=x,$$

所以有$\triangle OBC=x(\triangle ABC)$．类似有$\triangle OCA=y(\triangle ABC)$，$\triangle OAB=z(\triangle ABC)$．因为$\triangle ABC=\triangle OBC+\triangle OCA+\triangle OAB=(x+y+z)(\triangle ABC)$，我们得到$x+y+z=1$．

于是我们有

$$\begin{aligned}OA'+OB'+OC'&=xAA'+yBB'+zCC'\\&\leqslant x\cdot AA'+y\cdot AA'\\&\quad+z\cdot AA'\end{aligned}$$

$$=(x+y+z)\cdot AA'$$
$$=AA'.$$

注意，仅当$AA'=BB'=CC'$时等号才成立。

四十四、牛和羊

有两个人共同占有x头牛，他们以每头牛x元的价钱把牛卖了，把卖牛的钱按每头羊12元的价钱买了羊．因为他们卖牛所得的钱不能被12整除，便把剩下的钱买了一头羊羔．然后两人把羊群等分，各人得到的头数一样多．分到羊羔的那个人自然稍稍吃了点亏．为了弥补起见，另外那个人便给他一把口琴．试问口琴值多少钱？

解答 卖牛总收入是x^2元．要是x能被6整除，那末x^2就会被36整除，因而也就会被12所整除．但题设它不能被12整除，所以x不是6的倍数．这样就有$x=12k+r$，其中$|r|=1，2，3，4，5$．因此

$$\frac{x^2}{12}=\frac{(12k+r)^2}{12}=\frac{144k^2+24kr+r^2}{12}$$

$$=12^2+2kr+\frac{r^2}{12}.$$

因为每人占有同样头数的羊，所以羊的总头数必定是偶数，考虑到有一头是羊羔，故大羊的头数是奇数．两人用x^2元能买到的大羊的头数是$x^2/12$

中的商，它应该是奇数．由于$12k^2+2kr$是偶数，所以$r^2/12$中的商数应为奇数．为此，r^2必须大于12，这表明$|r|=4$或5．当$|r|=5$时

$$\frac{r^2}{12}=\frac{25}{12}=2+\frac{1}{12},$$

其中的商数是偶数．因此必有$|r|=4$，$r^2=16$．于是

$$\frac{r^2}{12}=\frac{16}{12}=1+\frac{4}{12},$$

余数为4（不是－4），因此羊羔值4元．所以一人得到一头4元的羊羔，另一人得到一头12元的羊．一把4元的口琴就可以把他们拉平成8元的所得．

四十五、平方序列

证明：序列

$$49, 4489, 444889, 44448889, \cdots, \underbrace{44\cdots4}_{n}\underbrace{88\cdots8}_{n}9,$$

…，的每一项都是完全平方.

解答 通项是

$$T = \underbrace{44\cdots4}_{n}\underbrace{88\cdots8}_{n}9 = 9 + 8\cdot 10 + 8\cdot 10^2 + \cdots$$
$$+ 8\cdot 10^n + 4\cdot 10^{n+1} + 4\cdot 10^{n+2} + \cdots$$
$$+ 4\cdot 10^{2n+1}.$$

把9分解成$1+4+4$，8分解成$4+4$，我们得

$$T = 1 + 4(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^n) + 4 +$$
$$(1 + 10 + \cdots 10^{2n+1})$$
$$= 1 + 4\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9} + 4\cdot\frac{10^{2n+2}-1}{9}$$
$$= \frac{4\cdot 10^{2n+2} + 4\cdot 10^{n+1} + 1}{9} = \left(\frac{2\cdot 10^{n+1}+1}{3}\right)^2$$

因为$2\cdot 10^{n+1}+1$的各位数字之和是$2+1=3$，它能被3整数，故上式右端总是一个整数的平方.

四十六、内接十边形

自古希腊时代起，作圆内接正多边形的问题一直很受数学家的关心．欧几里德就写过这方面的文章，并且给出了画圆内接正十边形的一个巧妙方法．我们首先指出，半径为r的圆内接正十边形的边长x为

$$x=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

注意，边$AB=x$所对圆心角为36°（图58）．因之三角形OAB是底角为72°的等腰三角形．

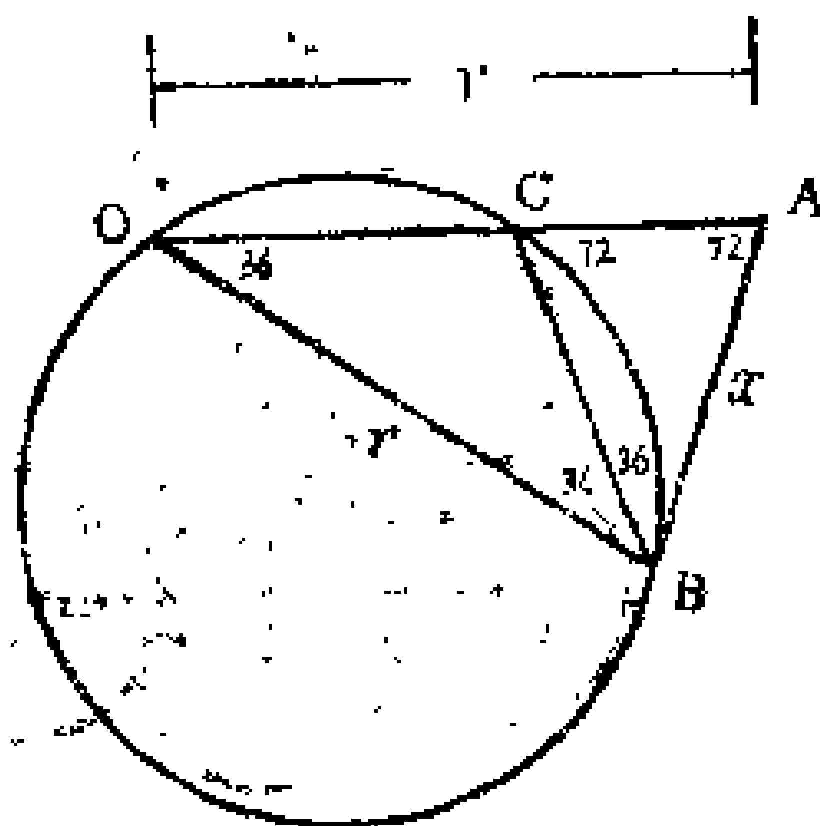


图 58

令BC平分$\angle B$，那末$\triangle ABC$与$\triangle OAC$都是等腰三角形，因而$x=AB=BC=OC$。所以$AC=r-x$.

考虑外接$\triangle OBC$的圆．由于$\angle ABC$与弦BC所对圆周角$\angle O$相等，所以AB与圆相切．因此

$$x^2=AO\cdot AC=r(r-x)=x^2-rx,$$

$$x^2+rx-r^2=0,$$

$$x=\frac{-r\pm\sqrt{5r^2}}{2}.$$

因为x是正数，故

$$x=\frac{r}{2}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

此即所证．

现在我们来研究班科夫（Bankoff）博士的著名问题．先作一个等边三角形KAB（图59），在其周围作六个相等的圆，其中三个在三边的中点与

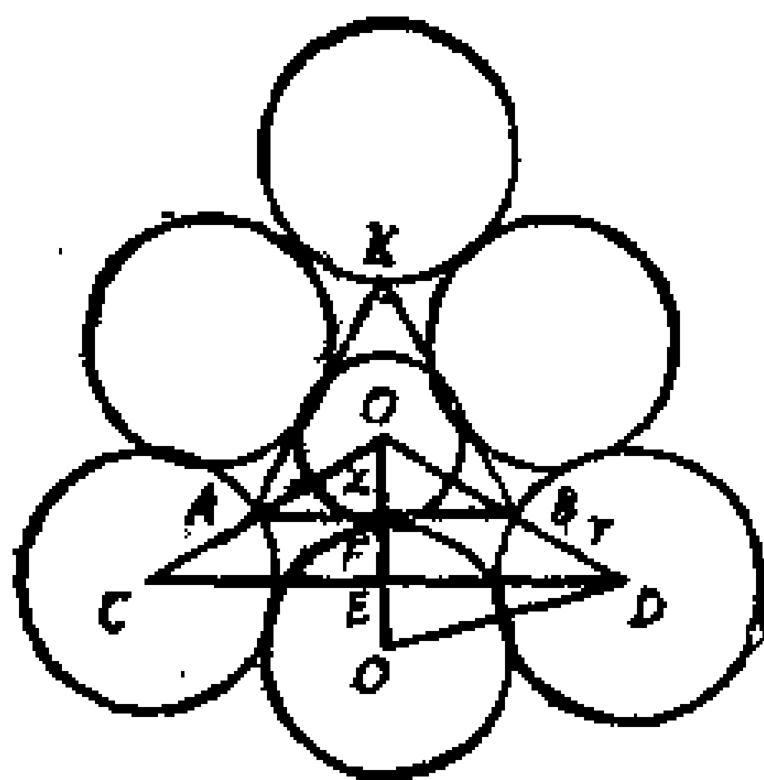


图　59

三边相切，另外三个过顶点且圆心在三条分角线的

延长线上．这六个圆同样地逐渐增大，直至它们相切为止．它们围着固定的三角形组成一个环，环由半径为r的六个等圆构成．令人十分惊讶的是，三角形KAB的内切圆的半径x竟然就是环中每个圆的内接正十边形的边长．（会有人发现这点，难道不令人吃惊么？）

不难看出等边三角形的内径（内切圆的半径）x是高（也即中线，分角线）的三分之一．看图即知

$$OB=\frac{2}{3}\ (\text{高})\ =2x\ .$$

显然AB与CD平行．因此

$$\frac{EF}{OF}=\frac{DB}{BO},\qquad \frac{EF}{x}=\frac{r}{2x},\qquad \text{故}EF=\frac{r}{2}.$$

于是$O'E=r/2$，即半径$O'F$的另一半．

由直角三角形OED可知

$$ED^2=OD^2-OE^2$$

$$=(2x+r)^2-\left(x+\frac{r}{2}\right)^2$$

$$=3x^2+3rx+\frac{3}{4}r^2.$$

因此由直角三角形$O'ED$可知

$$O'D^2=ED^2+O'E^2,$$

$$4r^2=\left(3x^2+3rx+\frac{3}{4}r^2\right)+\frac{1}{4}r^2,$$

$$r^2=x^2+rx,\quad x^2+rx-r^2=0,$$

同前面一样得到

$$x=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1).$$

四十七、红点与蓝点

考虑20行20列红点与蓝点组成的正方形点阵．只要同一行或同一列中相邻两点颜色相同时，就用与它们的颜色相同的线段把它们联结起来；颜色不同的相邻点则用黑色线段来联结．共有219个红点，其中39个点在方阵的边界上，但四角处不是红点．假定共有237条黑色线段．试问有多少条蓝色线段？

解答　20行的每行中有19条线段，故有 $19\cdot 20=380$ 条水平线段．又有同样多条垂直线段，故总共有760条线段．因为有237条是黑色，故另外523条是红色与蓝色．

用 r 表示红线段的条数，我们来数一数红点作为线段端点出现多少次．每条黑线段有一个红端点，每条红线段有两个红端点，所以红端点的总数是

$$237+2r,$$

但是边上的39个红点每一个都是3条线段的端点，阵列内部的其余180个红点每一个都是4条线段的端点．因此红点是线段端点的总次数是

$$39(3)+180(4)=837.$$

从而

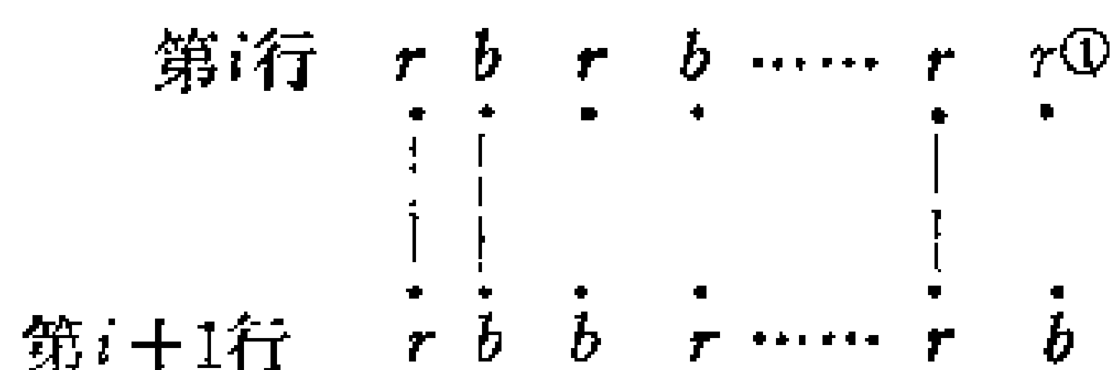
$$237+2r=837,\ 故\quad r=300.$$

于是蓝线段的条数是$523-300=223$.

美国数学月刊1971年796页上载有一个类似问题(E2251号问题)，是西蒙·弗雷泽大学的T.C.布朗(Brown)提出的，由菲利浦斯·艾克西托学院的斯蒂芬·B·毛列尔(Maurer)解决：

考虑具有偶数个行与偶数个列由红点与蓝点组成的矩形阵列．每行有一半是红点，一半是蓝点；每列也是如此．在一行或一列中只要相邻两点颜色相同，就用一段与它们颜色一样的线段联结起来．证明红线段总数与蓝线段总数相等．

解答 考虑相邻的两行，比如第i行与第$i+1$行．如果颜色相同的两点面对面，就用线段把它们联成一对．我们称这种点为“匹配”点．



颜色不同的一对为“失配”点．因为每行有一半的点是红色，另一半的点是蓝色，所以每行有同样多

①r表示红点，b表示蓝点．——译者注

个红点．显然，相邻两行有同样多的匹配红点，因此也必定有同样多的失配红点．

由于第i行的一个失配红点对着第$i+1$行的一个失配蓝点，所以

第$i+1$行的失配蓝点个数
=第i行的失配红点个数
=第$i+1$行的失配红点个数．

于是在第$i+1$行中失配红点与失配蓝点一样多．由于第$i+1$行的红点总数与蓝点总数相同，所以第$i+1$行的匹配红点个数与匹配蓝点个数一样多，这意味着在两行间搭桥的线段，红色的和蓝色的一样多．对相邻的列来说，情况也是这样．故得要证的结论．

四十八、遂尔法

已知一个圆的圆周 C，要找出圆心位置和求出半径长度是很容易的事．一般的办法是，作两条弦的垂直平分线来确定圆心，从而半径也可以立刻求出来．虽然作一条垂直平分线必须画一对弧，但若两弦相接，则只需画三条弧就可以作出两条垂直平分线（让一条弧在两对弧中各起一次作用）．于是总共用了至少三次圆弧和两次直边．试建立下面的求半径的遂尔（Swale）法，此法只使用两次圆弧、一次直边：

如图60，以圆周 C 上任意一点 O 为心作圆 D 交 C 于 P，Q，以 Q 为心用相同的半径在 C 内部截 D 于 R



图 60

令PR交C于L，则QL为C之半径（LR也是）.

解答 $\triangle QOR$的三条边显然都等于D的半径，因而$\triangle QOR$为等边三角形，$\angle ROQ=60°$. 所以，（两圆的）圆周角$\angle RPQ=30°$，C的圆心X处的角等于$60°$. 因此，$\triangle XQL$是等边三角形，从而$QL=r$（半径）.

（不难证明三角形RQL与XOQ全等，然后可得$RL=OX=r$.）

四十九、关于 $\pi(n)$

很早以来，素数就是数学家特别感兴趣的题目．关于这个引人入胜的内容的深入浅出的讨论，请读W．谢尔宾斯基的《数论》①第三章（110—155页）．关于素数的最有趣的函数有一个是$\pi(n)$，它是不超过自然数n的素数的个数．

问题：证明$\pi(n) \geqslant \frac{\log n}{\log 4}$．

解答　下面的初等证明是杰出的匈牙利数学家保尔·厄尔迪什发现的（见前面提到的谢尔宾斯基的著作第130页）．

令m表示自然数．设k^2是能整除m的最大平方数，因而$m=k^2v$．于是v不能含重因子，不然就有比k^2大的平方也能整除m（v叫做m的"非平方"部分）．

现在让n表示一个确定的自然数，并考虑自然数$m \leqslant n$．把数$m=1, 2, \cdots, n$的每一个都表示

①W. Sierpinski, Theory of Numbers.

成 $m=k^2v$ 的形状，这里 v 无重因子．由于在所有情况下，$k^2\leqslant m\leqslant n$，故 k 必定是 1，2，3，…，$[\sqrt{n}]$ 中的一个，这里 $[\sqrt{n}]$ 表示不超过 $\sqrt{n}$ 的最大整数．又因 $v\leqslant m\leqslant n$，所以 v 的所有素因子必来自 $\leqslant n$ 的素数中，即取自 p_1，p_2，…，$p_{\pi(n)}$．既然 v 是这定个集合中的素数的乘积，它必定是

$$p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\cdots p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}}$$

这种数的某一个，这里的指数 a_i 或等于 0 或等于 1（因为 v 无重因子）．由于每个 a_i 可等于 0 或 1，所以这种形状的数共有 $2^{\pi(n)}$ 个．总之，对每个 $m=k^2v\leqslant n$，v 无重因子，k 必属于 $[\sqrt{n}]$ 个数的集合

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ [\sqrt{n}]\},$$

而 v 则必属于 $2^{\pi(n)}$ 个数的集合

$$Y=\{p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\cdots\ p_{\pi(n)}^{a_{\pi(n)}},\ a_i=0\text{或}1\}.$$

这样一来 $m=1$，2，…，n 的每个数都要在 X 中得到一个 k，在 Y 中得到一个 v，使得 $m=k^2v$．反之，通过在 X 中选取适当的 k，在 Y 中选取适当的 v，也可以造出形如 k^2v 的数 1，2，…，n．因此，用一切可能的方式从 X 中选一个 k，从 Y 中选一个 v，造一个 k^2v 的这个手续可以造出包含 1，2，…，n 这 n 个数的数集．但这种造法共造出了 $[\sqrt{n}]\cdot 2^{\pi(n)}$

个数.

因此我们得

$$[\sqrt{n}]\cdot 2^{\pi(n)}\geqslant n.$$

而由定义有$\sqrt{n}\geqslant[\sqrt{n}]$，所以

$\sqrt{n}\cdot 2^{\pi(n)}\geqslant n$, $2^{\pi(n)}\geqslant\sqrt{n}$,

$$\pi(n)\log 2\geqslant\frac{1}{2}\log n,$$

$$\pi(n)\geqslant\frac{\log n}{2\cdot\log 2}=\frac{\log n}{\log 4}.$$

十九世纪时，俄国数学家P.契比雪夫(Tcheb-ycheff) 证明了更强的定理：

$$\pi(n)>\frac{n}{12\cdot\log n}.$$

(谢尔宾斯基的《数论》第149页上有证明.)

美国数学月刊1944年第479页的 4083 号问题是保尔·厄尔迪什提出的关于$\pi(n)$的一个简短问题，由俄勒岗大学的惠特尼·斯各贝特(Scobert)解决：

如果$a_1<a_2<\cdots<a_k\leqslant n$是自然数的任一数列，其中每个$a_i$都不能整除其余数的乘积，试证明$k\leqslant\pi(n)$.

解答 因为每个$a_i\leqslant n$，所以都有素数分解式

$$a_i=p_1^{q_1}p_2^{q_2}\cdots p_{\pi(x)}^{q_{\pi(x)}}.$$

要使a_i不能整除其它a的乘积，a_i必须含有某个素数$p_i\in(p_1, p_2, \cdots, p_{\pi(n)})$，其次数大于其余全部$a$的分解式中$p_i$的次数之和．这样一来，$a_i$包含的这一$p_i$的次数必定大于每个别的$a$中$p_i$的次数．每个$a_i$有这样一个$p_i$，然而显然不可能有两个$a_i$可以这样地与同一个$p_i$相联系．所以$a_i$的个数不可能比$(p_1, p_2, \cdots, p_{\pi(n)})$中素数的个数多，因而得$k=\pi(n)$。

五十、定长弦

设两圆Q与R相交于点A与B（图61）．Q上位于R外的弧上有一点P，它通过A、B投影在R上得一弦CD．试证明：无论在弧上何处选择P，弦CD的长度永远不变．

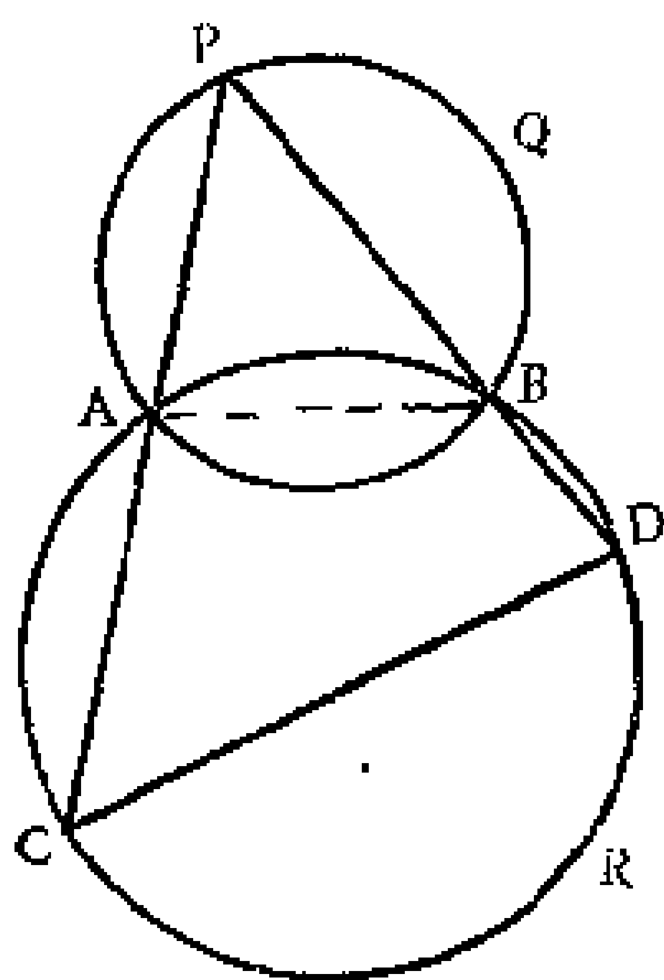


图 61

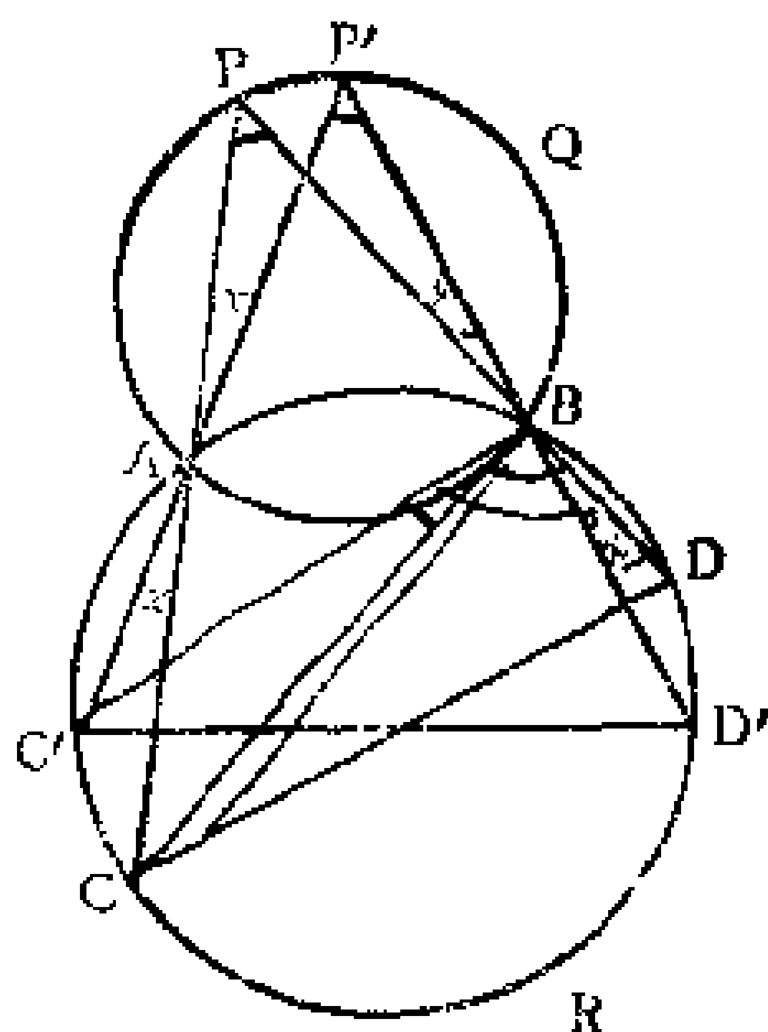


图 62

解答 令P与P'表示与弦CD与$C'D'$相对应的点(图62)我们有

$$\angle PAP'=\angle PBP',$$

$$\angle PAP'=\angle CAC',$$

$$\angle PBP' = \angle DBD',$$

由此得$\angle CAC' = DBD'$. 这就是说，弧 CC' = 弧 DD'. 两端加上弧CD'得

$$弧C'D' = 弧CD,$$

因此得

五十一、内对角线的条数

自身不相交的多边形叫简单多边形．然而简单多边形远非凸多边形，它有许多对角线全部或部分地在多边形外面．尽管如此，任何简单n边形至少有$n-3$条对角线完全在其内部，试证明之．

解答 对四边形结论显然是成立的（图63）．

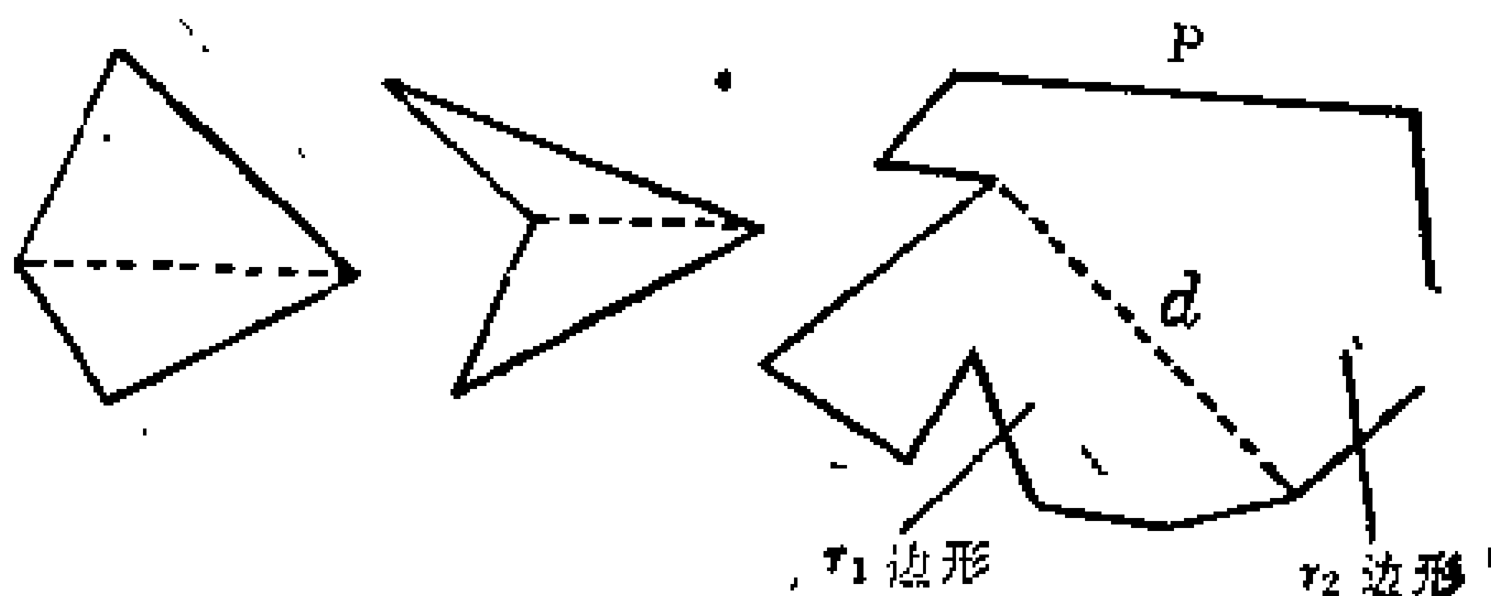


图 63

今设该论断对k边形也成立，$k=4, 5, \cdots, n$．我们考虑简单$(n+1)$边形P．对任何一个多边形来说，不可能在其内部一条对角线也没有．关于这个结论的证明，读者可以读 Ross Honsberger：Ingenuity in Mathematics(数学技巧)，vol. 23，New Mathematical Library，Mathema-

tical Association of America, p. 35 (美国数学会的新数学文库. 第23卷, 第35页). 用d表示全在P内的一条对角线. 设d将P分成一个r_1边形与一个r_2边形, 那末由归纳假设知, P至少有r_1-3条以及r_2-3条内对角线在两个子多边形内. 把d算进去, P内至少有r_1+r_2-5条内对角线.

两个子多边形的总边数是r_1+r_2, 这包括P的全部$n+1$条边, 再外加对角线d算了两次. 因此$r_1+r_2=n+3$, 故P至少有

$$r_1+r_2-5=n+3-5=n-2=(n+1)-3$$

条内对角线. 归纳法证明了我们的论断正确.

由于对每个自然数n我们都作出一个n边形, 它

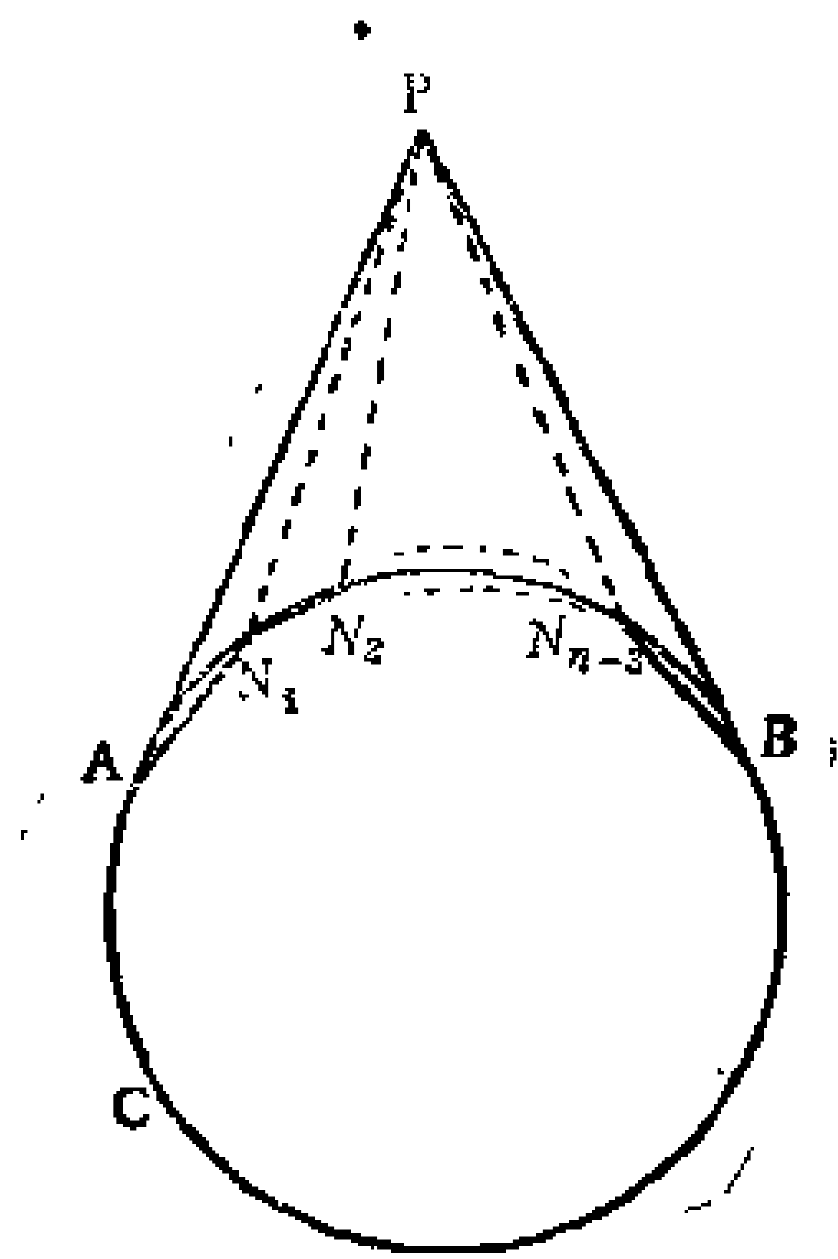


图 64

不多不少恰好有$n-3$条内对角线，所以$n-3$，就是我们始终可以靠得住的这种对角线的最大条数．令圆C在A、B的两条切线交于P（图64）．在靠近P的那段弧AB上取点N_1，N_2，…，N_{n-3}，得一个n边形$PAN_1N_2\cdots N_{n-3}B$，它恰好有$n-3$条内对角线PN_i，每条都由P发出．

澳大利亚的R．B．艾格顿（Eggleton）证明了，简单n边形恰好有$n-3$条内对角线的充要条件是此多边形的任何两条内对角线不相交．

五十二、掷骰子（二）

试证明：不可能使一对骰子等可能地出现点数和2，3，……，12。按惯例假设两颗骰子是可区别的（例如，第一颗骰子现2与第二颗骰子现4不同于第一颗现4与第二颗现2，尽管得出的点数和都是6）．

解答　用p_i表示第一颗骰子出现i的概率，q_i表示第二颗骰子出现i的概率，那末得到点数和为2的概率是p_1p_1．得到点数和为12的概率是p_6q_6．要是全部十一个概率都一样，那末每个概率就会是1/11，得7的概率是

$$\frac{1}{11}=p_1q_6+p_1q_5+\cdots+p_6q_1$$

$$\geqslant p_1q_6+p_6q_1=p_1q_6\left(\frac{q_1}{q_1}\right)+p_6q_1\left(\frac{q_6}{q_6}\right)$$

$$=p_1q_1\left(\frac{q_6}{q_1}\right)+p_6q_6\left(\frac{q_1}{q_6}\right)=\frac{1}{11}\left(\frac{q_6}{q_1}\right)$$

$$+\frac{1}{11}\left(\frac{q_1}{q_6}\right)$$

$$=\frac{1}{11}\left(\frac{q_6}{q_1}+\frac{q_1}{q_6}\right).$$

因此我们得

$$\frac{q_0}{q_1}+\frac{q_1}{q_0}\leqslant 1.$$

然而正实数及其倒数之和 $x+\frac{1}{x}$ 至少等于2，因而证明了我们的论断。

五十三、古怪的数列

我们浏览自然数 1，2，3，…，从中挑选出一个数列U.选法是取

第一个奇数，	（即 1）
紧后边的两个偶数，	（2 与 4）
紧接着的三个奇数，	（5，7，9）
紧接着的四个偶数，	（10，12，14，16）
紧接着的五个奇数，	（17,19,21,23,25）

一直进行下去。

U：1，2，4，5，7，9，10，12，14，16，17，19，….

证明第n项u^n的公式是

$$u_n = 2n - \left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right],$$

这里〔x〕表示不大于x的最大整数。

解答 我们把U与偶数作成的数列E来对比，并把对应项之差作成的数列表示为 $D=\{d_n\}$。我们将会发现D包含一个1，两个2，三个 3，…，n个n，

…。U的项按一项一组，两项一组，三项一组，…来确定，在每组之内，无论是奇是偶，它的项都是

$E=\{2n\}$:	2,	4, 6,	8, 10, 12,	14, 16, 18, 20,	22, …,
$U=\{u_n\}$:	1,	2, 4,	5, 7, 9,	10, 12, 14, 16,	17, …,
$D=\{d_n\}$:	1,	2, 2,	3, 3, 3,	4, 4, 4, 4,	5, …,

逐项递增 2，就象偶数按 2 递增一样。这样一来，差数的数列D在每组内保持不变．然而当其从前面一组过渡到后面一组时，偶数仍然按 2 递增，而数列U中从奇组到偶组或从偶组到奇组，却是按 1 递增。因此差数的数列从一组过渡到下一组时递增 1，于是D的项便如前面所说的那样，通过求出d_n的公式，我们便从关系式

$$u_n=2n-d_n$$

求出u_n的公式。

下面对特定的n来求 d_n。我们已经讲过，D 的项成组地以相同值出现：

$$(1),(2,2),(3,3,3),\cdots,(\underbrace{k-1,k-1,\cdots}_{k-1\text{个}}),$$

$$(\underbrace{k,k,\cdots,}_{k\text{个}})\cdots$$

我们需要找的是具体的d_n落入的那一组。若它落入第k组，则它的值便是k，我们注意到，在第k组前有

1个1，2个2，3个3，…，($k-1$)个

$$(k-1),$$

总共有

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{(k-1)k}{2}\text{项.}$$

如果d_n落入第k组内，那末由于它是D的第n项，必须有

$$\frac{(k-1)k}{2}+1\leqslant n<\frac{[(k+1)-1](k+1)}{2}+1$$

例如，如果d_n在第10组，则

$$\frac{(10-1)10}{2}+1\leqslant n<\frac{(11-1)11}{2}+1.$$

这时自不待言我们也有$(9-1)9/2+1\leqslant n$，$(8-1)8/2+1\leqslant n$，…，$(1-1)1/2+1\leqslant n$。在所有形如$(m-1)m/2+1$的整数中，是$m=k$给出了$\leqslant n$的最大值，因此$k=d_n$是满足$(m-1)m/2+1\leqslant n$，即

$$m^2-m+2(1-n)\leqslant 0$$

的最大值m。但是对于在方程$m^2-m+2(1-n)=0$的两个根之间的闭区间内的任何m值，$m^2-m+2(1-n)$是非负的，方程的根m的值是

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1-8(1-n)}}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{8n-7}}{2}\quad(\text{图}65)$$

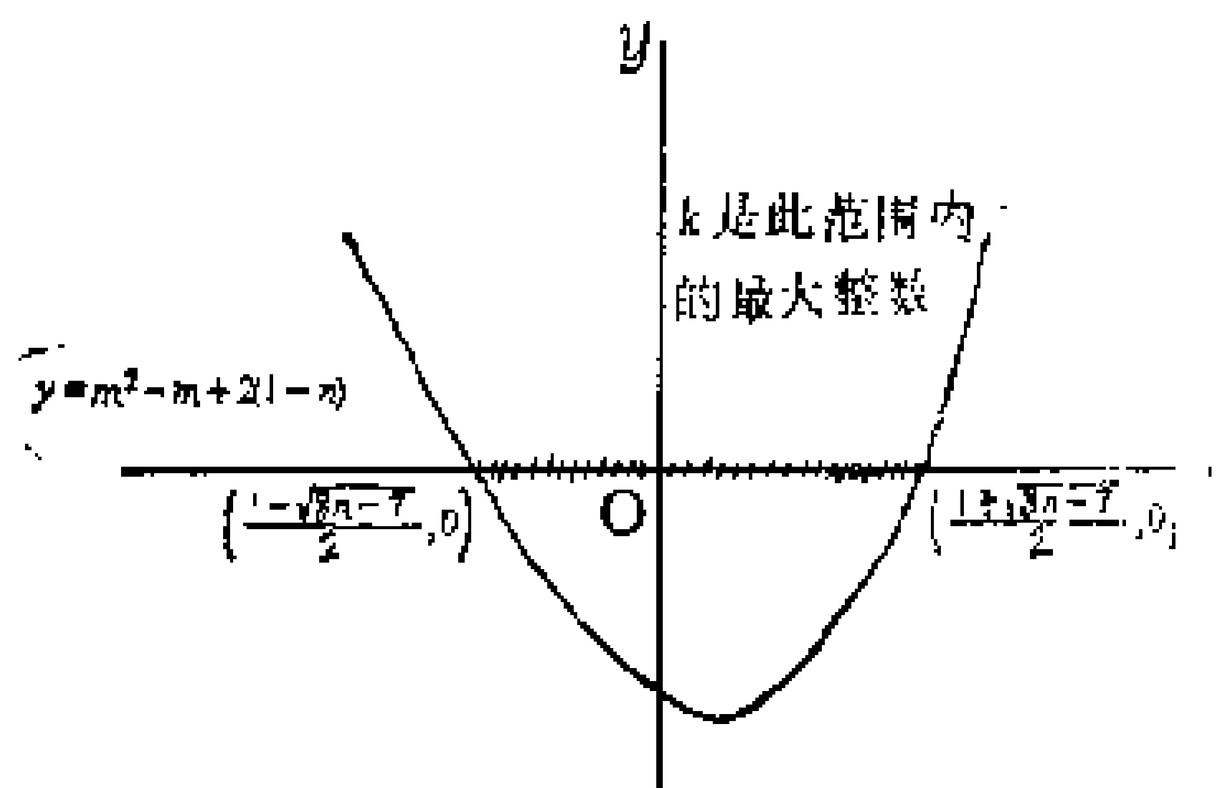


图 65

因此k是

$$\frac{1-\sqrt{8n-7}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{1-\sqrt{8n-7}}{2}$$

范围内的最大整数．由于k是整数，我们有

$$d_n=k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right],$$

从而所求的公式就是

$$u_n=2n-\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right].$$

（曼尼托巴大学的）奈森·门德尔松（Mendelson）注意到不在U内的自然数作成的补数列

$V=\{v_n\}$：3，6，8，11，13，15，18，

20，22，24，27，…．

他指出V的项也是成组地出现，一个奇项，两个偶项，三个奇项，等等，并且指出，可以通过相加而不是象上面求u_n时那样通过从$2n$减去d_n来求出v_n的

公式：

$$u_n=2n+d_n=2n+\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right].$$

这可立即由$v_n+v_n=4n$推出。证明这一点并不很难，留给读者当练习。

五十四、长长的相邻自然数串

素数的个数固然是无穷多，然而自然数列中相邻素数间的空隙却也可以任意地大。这一点是很容易看出的，你看，对任意自然数 n，

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3,\ \cdots,\ (n+1)!+(n+1)$$

便是n个相邻的复合数。

现在想请你证明的是，也有任意长的一段相邻自然数，其中每个数都可以被大于1的完全平方数整除。

解答 我们想用归纳法证明，对于一切自然数n，都存在n个相邻自然数串，其中每个数都能被大于1的完全平方数所整除。

(i) $n=1$时，任何>1的平方都满足要求。

(ii) $n\geqslant 1$时，假设n个相邻的自然数

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

个个都能被>1的完全平方所整除。现在我们要寻找具有这个性质的$n+1$个相邻自然数。

用s_i表示能整除$a_i(i=1,2,\cdots,n)$的大于1的

完全平方数，用L表示s_i的乘积.因为a_i是相邻数，所以$a_2=a_1+1$，等等，等等。用这种记法，a_n+1表示成a_{n+1}，因此a_1，$a_2\cdots$，a_n，a_{n+1}就是$n+1$个相邻数串。用A表示$a_{n+1}(L+2)L$。由于A包含L，故A可以被每个s_i整除．现在来看$n+1$个相邻自然数

$$A+a_1,\ A+a_2,\ \cdots,\ A+a_{n+1}.$$

对于$i=1,2,\cdots,n$，我们的s_i既整除A也整除a_i，这说明这些数的前n个中的每一个都可以被>1的平方所整除，而最后一个数是

$$\begin{aligned}A+a_{n+1}&=a_{n+1}(L+2)L+a_{n+1}\\&=a_{n+1}(L^2+2L+1)\\&=a_{n+1}(L+1)^2.\end{aligned}$$

因$s_i>1$，故$L>1$，所以$(L+1)^2$是>1的平方。这样一来全部$n+1$个数都可以被>1的平方所整除。由归纳法便得出所需结论了。

同样还可以证明，对任何自然数n，都存在n个相邻自然数，其中每个数都能被>1的完全m次方所整除，这里$m>2$. 为此只消把s_i取作>1的m次方，把A换成

$$A=a_{n+1}[(L+1)^m-1].$$

注意，我们的论证不仅证明了所说的那种数列的存在，而且还说明了如何用迭代步骤作出这种数列。由于只要求L能被每个s_i整除，所以我们可以

把 L 取作 s_i 的最小公倍数而不必取作全部 s_i 的乘积。这样可以使 L 小些，减轻计算量。

我真的感到惊讶：沿着自然数数列看下去，到某处就有万亿个数（或者你高兴要多大就有多大）构成一串，其中每个数都能被 >1 的完全万亿次方所整除，而且，你若给出足够的时间，我硬是可以给你把这样的一串数写出来哩！

五十五、最小内接四边形

设$ABCD$是圆内接四边形，其对角线交于X。P、Q、R、S是从X到$ABCD$各边的垂足。证明在四边形$ABCD$的每边上各有一点的所有四边形中，$PQRS$的周长最短。

解答 我们先证PS、PQ与AB夹成等角（图66），即

$$\angle APS=\angle BPQ.$$

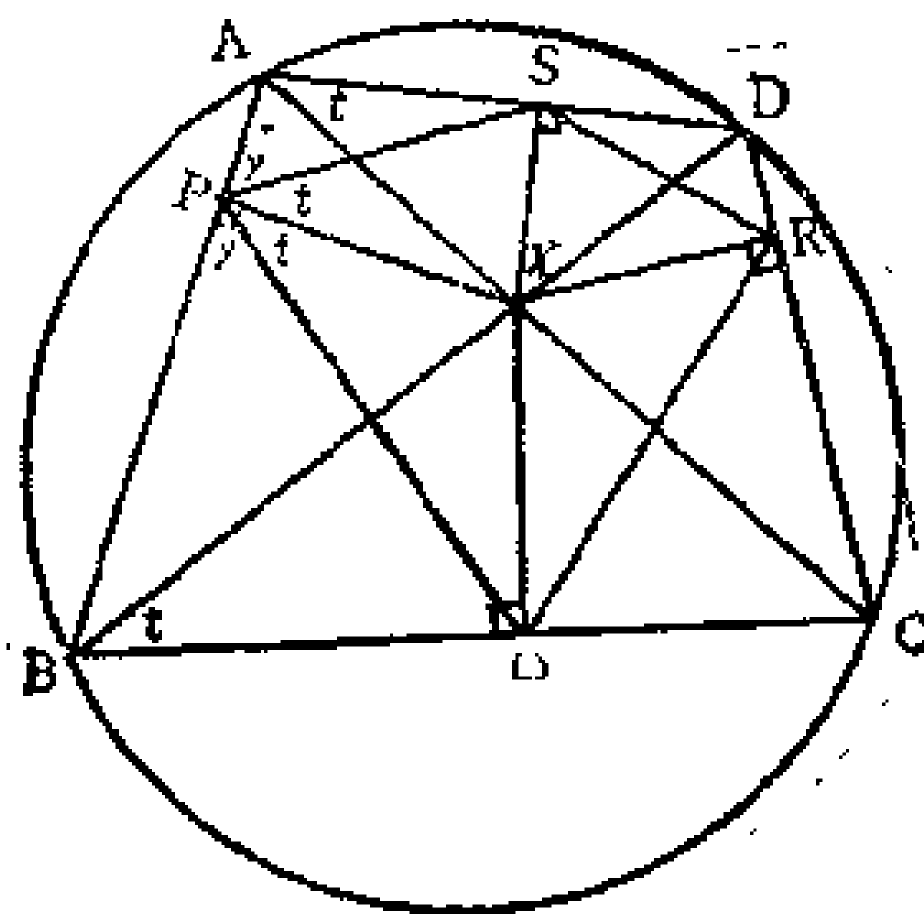


图 66

为此我们证明上述两个角的余角相等：

$$\angle SPX=\angle QPX.$$

因四边形$PBQX$有二直角，故为圆内接四边形，于是$\angle QPX=\angle QBX$。同样，$APXS$也是圆内接四边形，又有$\angle SPX=\angle SAX$。而在已知圆内$\angle CBD=\angle CAD$。因而$\angle QPX=\angle SPX$，故得所求的结论。同样，在$PQRS$的各项点处，各边与$ABCD$的对应边夹成等角。

这样作的结果便是，将$PQRS$对$ABCD$的一条边作反射，在起镜面作用的线上相交的两条边的任一条的像都是另外那条边的延长线而已（图67）。

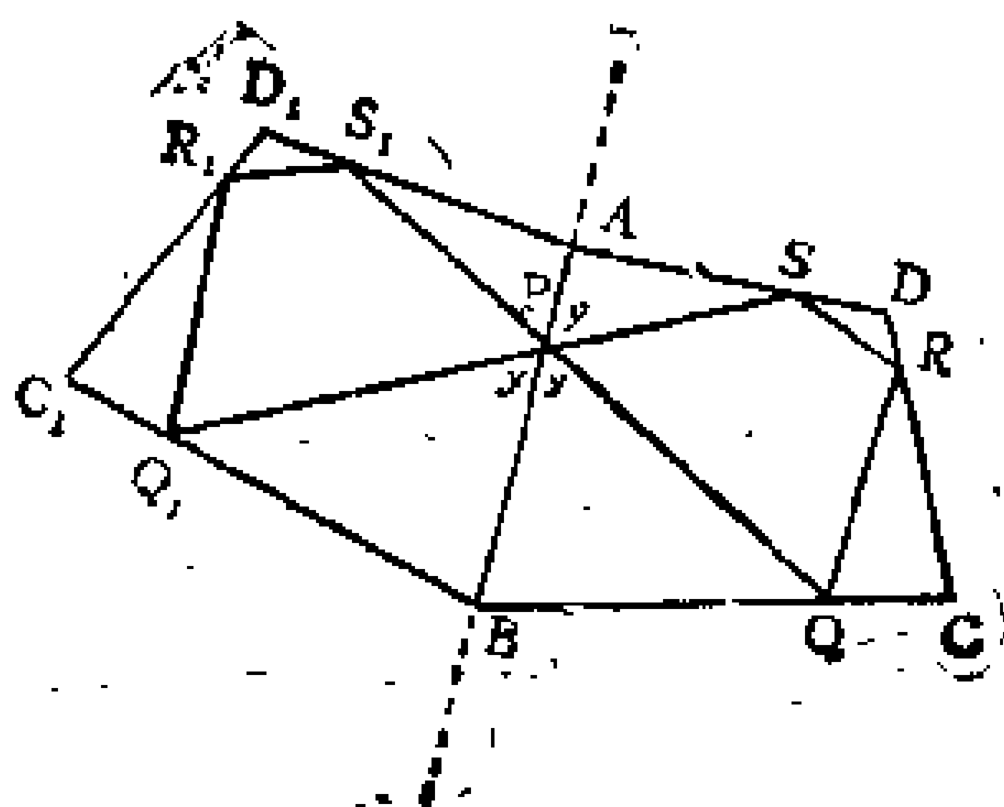


图 67

因$\angle APB$是平角，故$2y+\angle SPQ=180°$。经反射有$\angle BPQ=\angle BPQ=y$。因此$\angle Q_1PS=2y+\angle SPQ=180°$

因此如图68所示，我们可以通过三个反射Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ把$PQRS$的周长拉直。当然我们这儿只有

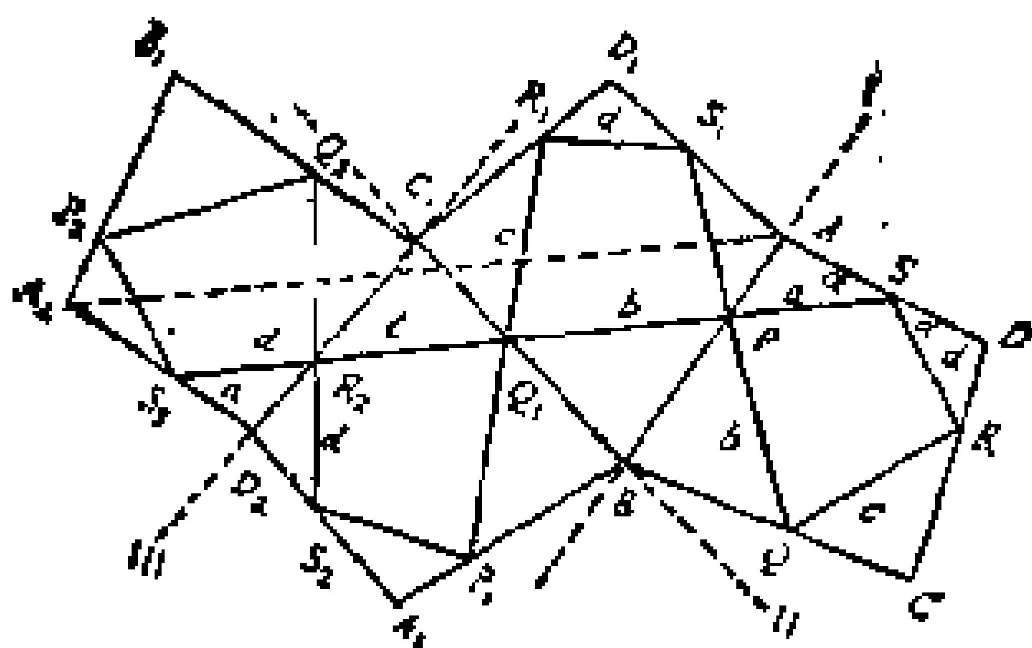


图 68

$ABCD$内的$PQRS$的四个相靠接的全等图形。故$AS=A_2S_3$。但交错角$D_2S_3R_2$与ASP相等（都等于$\angle DSR$），这表明A_2S_3平行于AS，因此A_2ASS_3是平行四边形，从而$PQRS$的拉直了的周长SS_3等于AA_2。

上述那些反射可以把在$ABCD$的每边上各有一个顶点的任意一个四边形的四边展开。如果Y是AD上的顶点，Y_3是它在A_2D_2上的像，那末因为A_2Y_3与AY平行且相等，故A_2AYY_3是个平行四边形（图69），从而$YY_3=AA_2$。然而展开后的周长在Y与Y_3之间，如果Y形成折线，就比Y_3长，最短时也不过与YY_3重合而已，这时就等于$PQRS$的周长AA_2。因此，$PQRS$有最小周长。

注意，如果E，F，G是YY_3上面YY_3分别与AB，BC_1，C_1D_2相交的点，那末E，F，G就对应于$ABCD$（除AD边）的另三边上的点，因此Y，

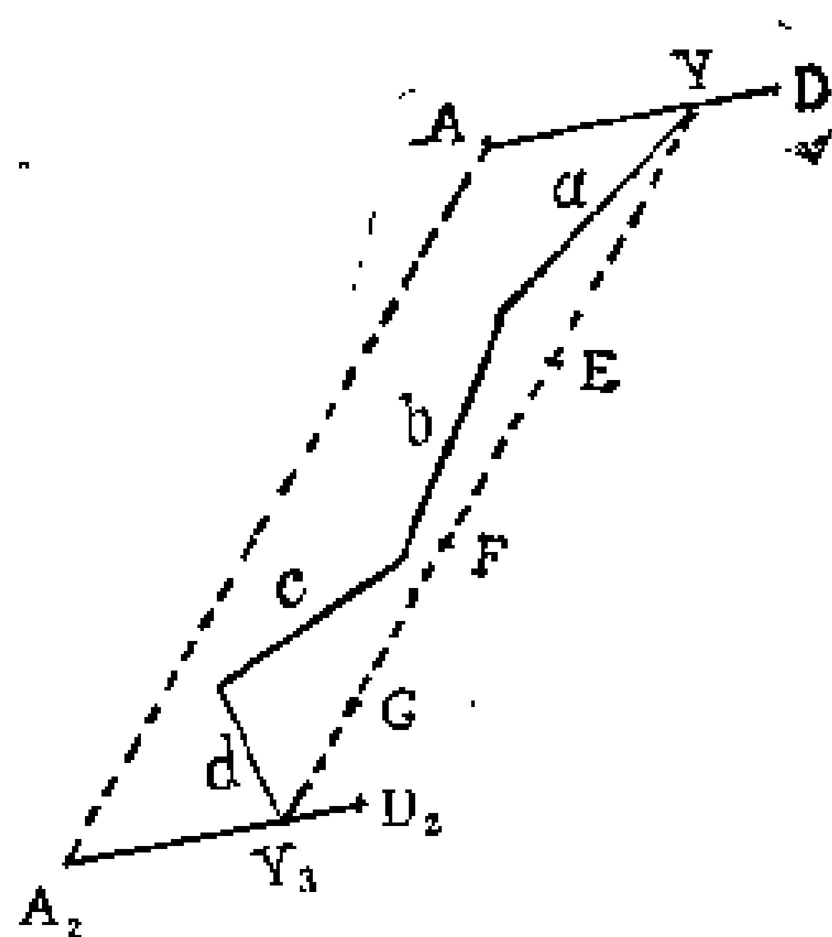


图 69

E，F，G 确定一个内接四边形 T．展开 T 就得到 YY_3，即T的拉直的周长。所以从 AD上任一点Y出发均可作$ABCD$ 的周长最小的内接四边形。

五十六、三角形数

下面的三角形阵列中的圆盘个数确定一个三角形数的序列（图70），其开始各项为1，3，6，10，15，21，28，36，45，…，第n项是

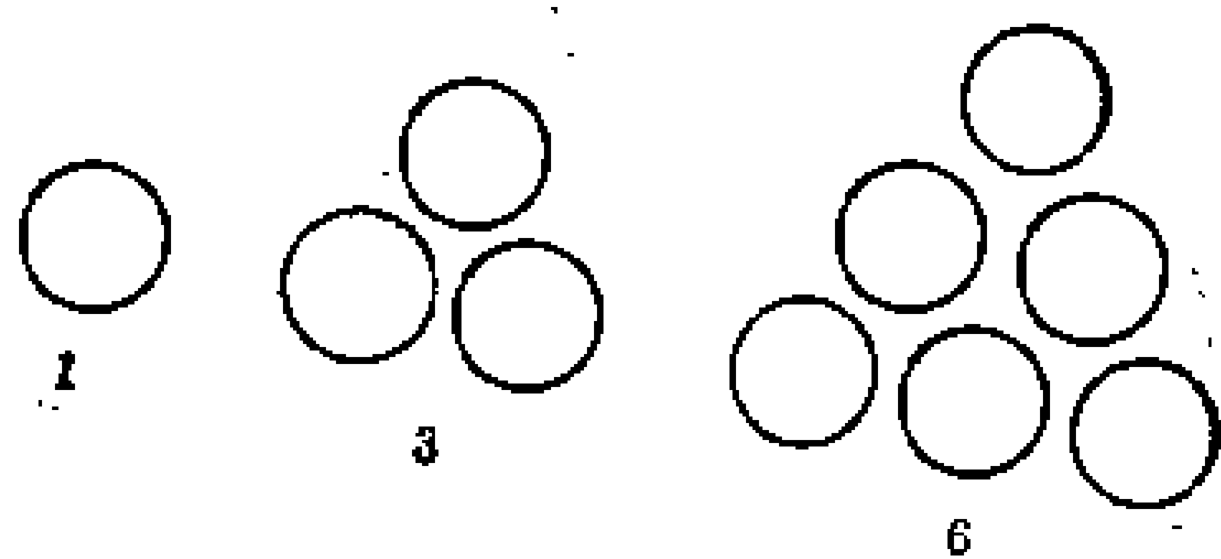


图 70

$$t_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

由于$t_n = t_{n-1}+n$，最初十多项很容易心算出来：

1.（加2）3，（加3）6，（加4）10，（加5）15，（加6）21，28，36，45，55，66，78，91，105，120，136，153，…下面考虑七个关于三角形数的小问题。

(i)〔AMM，1935—36，p，313，问题115，俄亥俄州诺伍德城的G.W.维斯哈德（We-

ishard）提问并解答。〕①

试证明：任何奇数平方在八进制中末位都是1；若将1划去，则剩下部分恒为三角形数。

解答 注意，相邻二数n与$n+1$中必有一数为偶数，我们有

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$$
$$=8k+1,$$

式中k为整数。因此在八进制中，奇数平方的尾数为1。

把数m在八进制中的末位1划去，剩下$\frac{(m-1)}{8}$. 因此按所说办法划去1后有

$$\frac{(2n+1)^2-1}{8}=\frac{4n(n+1)}{8}=\frac{n(n+1)}{2}=t_n,$$

即第n个三角形数。

(ii) 〔AMM, 1932, p. 179, 问题3480, 俄亥俄州诺伍德城G.W.维斯哈德提出，威尔斯利学院海伦·A·美利尔（Merrill）解答.〕

试证明：以9为基的数系中，每个全由1组成的数都是三角形数：

1, 11, 111, ….

①AMM为美国数学月刊——译注

解答 第一个数1，显然是三角形数。如果将1附在用基9表示的数k的末尾，便得数$9k+1$。设k正好是个三角形数，$k=n(n+1)/2$，那末

$$9\cdot\frac{n(n+1)}{2}+1=\frac{9n^2+9n+2}{2}$$
$$=\frac{(3n+1)(3n+2)}{2},$$

又是一个三角形数。由归纳法便得出要证的结论。

我们注意，把01附在以3为基表示的数k后也得到$9k+1$.因此把01附到以3为基的三角形数后也产生出另一个三角形数.

以25为基时，把数字3附在三角形数$n(n+1)/2$的末尾得

$$25\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3=\frac{25n^2+25n+6}{2}$$
$$=\frac{(5n+2)(5n+3)}{2},$$

这是三角形数。因而以25为基时，三角形数末位放3，或者完全等价地在以5为基时，三角形数末二位放03，都得出新的三角形数。

一般地，如果以$(2k+1)^2$为基时三角形数后附上一位数$\frac{1}{2}k(k+1)$；或者以$2k+1$ $(k\leqslant3)$为基时三角形数后附两位数0与$\frac{1}{2}k(k+1)$，或者以$2k+$

1($k>3$)为基时附上代表 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 的两位数，结果都得到三角形数.

(iii) 〔AMM，1963，p.211，问题E1516，加利佛尼亚大学R.J.鄂贝格（Oberg）提出，坦普尔大学J.E.依格（Yeager）解答.〕

用三角形数的最末一位数组成 $N=0.1360518\cdots$，问N是有理数还是无理数？

解答 三角形数写出来是

1，3，6，10，15，21，28，36，45，55，66，78，91，105，120，136，153，171，190，210，231，253，276，300，325，351，….

因此N写出来就是

$N=0.136051865568150631001136051\cdots$，

看来有20位循环。仍然把第n个三角形数记成 t_n，我们有通式

$$t_{n+20}-t_n=\frac{(n+20)(n+21)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+41n+420-n^2-n)$$

$$=10(2n+21)，尾数是0。$$

因此t_{n+20}与t_n的末位数字一定是相同的，这就肯定了N是循环小数，从而N是有理数。

注意，N简直象个迴文，倒读正读都一样 事实上，

$$\frac{N}{10}=0.0136051865568150631001360510\cdots$$

是迴文式的循环小数。

可以证明：由三角形数的末k位数字，$k=1, 2, 3, \cdots$可以得到一个有理数N。三角形数是算术级数$1+2+3+\cdots$的部分和。不难证明，由自然数的任意算术级数的部分和的末k位数字构成的数N是有理数。

(iv)〔AMM，1962，p.168，问题E1473，哥伦比亚大学J.L.皮腾波尔（Pietenpol）提出，加利佛尼亚州科隆纳城美国海军军械实验所A.V.西尔维斯特（Sylwester）解答.〕

我们看到三角形数1与36都是完全平方数。试证明有无穷多个三角形数也都是完全平方。

解答 上面的论断来自一个深刻的观察，即只要t_n是完全平方，那末$t_{4n(n+1)}$必定也是完全平方：

$$如果t_n=\frac{n(n+1)}{2}=k^2，则4n(n+1)=8k^2,$$

于是

$$t_{4n(n+1)}=t_{8k^2}=\frac{8k^2(8k^2+1)}{2}=4k^2(8k^2+1)$$

$$=4k^2[4n(n+1)+1]$$

$$=4k^2(4n^2+4n+1)$$

$$=4k^2(2n+1)^2，完全平方.$$

(v) 〔AMM, 1933, p. 362, 问题E21, 旧金山V. F. 伊凡诺夫 (Ivanoff) 提出，底特律大学L. S. 庄士敦 (Johnston)解答.〕

试证明：相邻两个三角形数之平方差必为完全立方数：

$\{t_n\}$： 1， 3， 6， 10， 15， 21， …，

$\{t_n^2\}$： 1， 9， 36， 100， 225， 441…，

{差}： 8， 27， 64， 125， 216， ….

解答 大家都知道前n个自然数的立方和是

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=t_n^2.$$

因此$t_{n+1}^2-t_n^2=(n+1)^3$，即完全立方.

(vi) 〔Pi Mu Epsilon, 卷2, 1954—59, p.378,问题92,洛杉矶城列昂·班科夫(Bankoff)提出，卡内基工学院托马斯·包尔润(Porsching)解答.〕

试证明三角形数的倒数和为 2：

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=2.$$

解答 由两条双曲线

$$y_1(x)=\frac{1}{x},\qquad y_2(x)=\frac{1}{x-1}$$

可以得到一个十分优美的几何解（图71）。

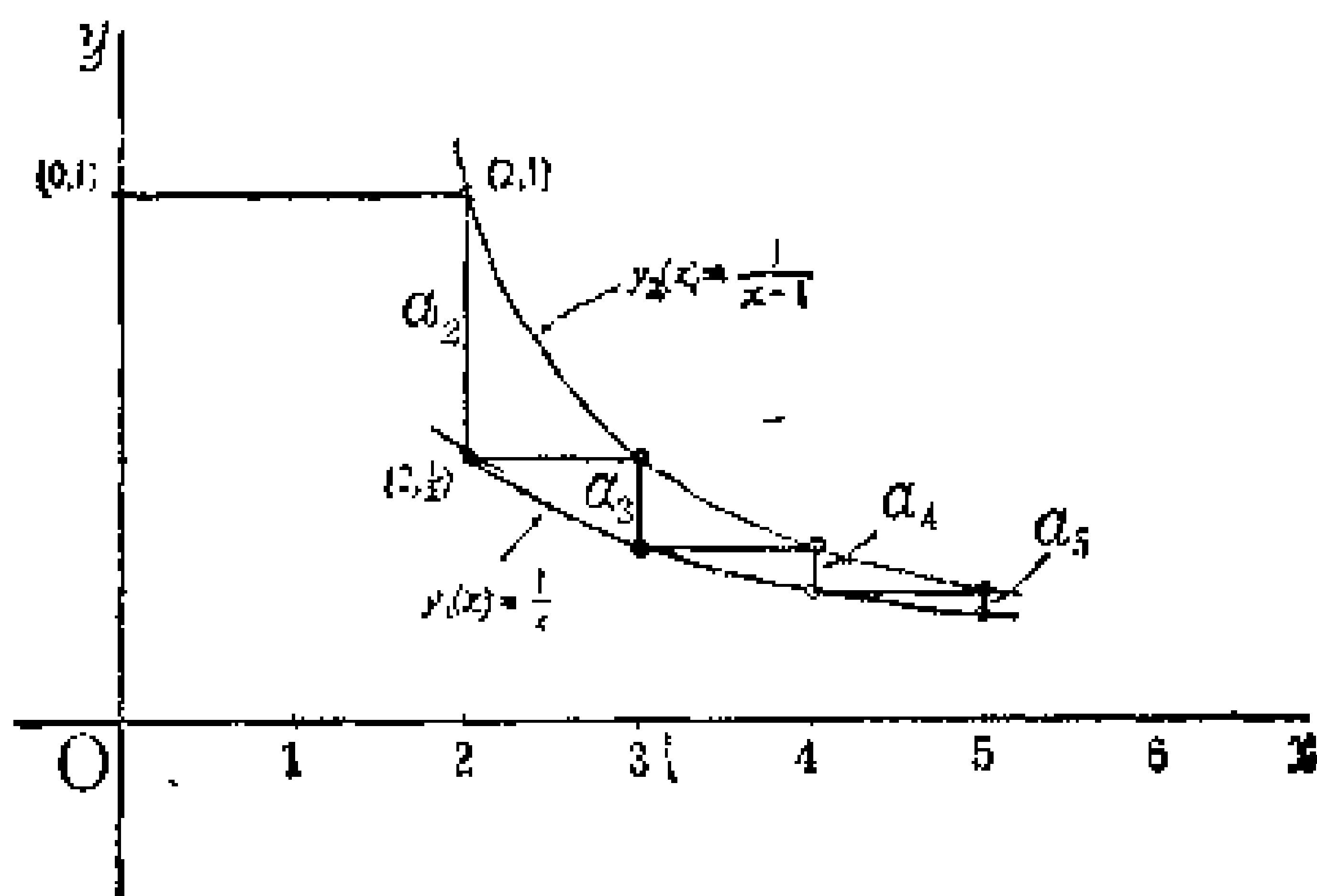


图 71

当x为整数，$n\geqslant 2$时，两曲线纵坐标之差a_n为

$$a_n=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2}\,\frac{2}{n(n-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1}{t_{n-1}}.$$

因此$\frac{1}{t_{n-1}}=2a_n$，问题中的和就是

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots=2(a_2+a_3+\cdots).$$

但$x=n$时的$y_2(x)$值与$x=n-1$时的$y_1(x)$值相等，所以a_n在y轴上的投影首尾相接组成从点（0，1）到原点的直线段。由于两条双曲线的渐近

线都是正x轴，因而全部投影完全充满上述单位线段，故

$$a_2+a_3+a_4+\cdots=1,$$

由此立刻得出要证的结论.

除了上面的几何解法外，还有下面的优美代数解法:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots$$

$$=\frac{2}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{4.5}+\cdots$$

$$=2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\right)$$

$$=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right]$$

$$=2.$$

(vii) 〔AMM, 1968, p.410,问题E1943，印度巴罗达J.M.哈特里 (Khatri) 提出，富兰克林马歇尔学院贝纳德·杰柯布森 (Jacobson) 解答.〕

我们最后的问题是想知道，是否能选出三角形数的一个无穷序列，从它开头算起的任意多项之和也是一个三角形数.

解答 设已经作成了这样的序列的一部分，而

且除了要求应有的性质外还多一条特别性质：在这部分序列中加到任意项t_k的和是t_{k+1}。那末，并入项$t_{t_{k+1}-1}$就延伸了序列，同时保留了序列的重要特性。因为$t_n+(n+1)=t_{n+1}$，所以当$n=t_{k+1}-1$时，

$$新和=t_{t_{k+1}-1}+t_{k+1}=t_{t_{k+1}}.$$

t_3，t_5，t_{20}，t_{230}加入了这种序列，此序列之部分和为t_4，t_6，t_{21}，t_{231}。实际上，从第2项以后的任何三角形数开始，应用这条并入规则，就能产生出具有所需特性的无穷序列。

最后我们指出，还可以选得出三角形数的无穷序列，其部分和都是完全平方数。例如序列t_1，t_2，t_6，t_{18}，…，$t_{2\cdot3^k}$，…的部分和

$$t_1+t_2+t_6+\cdots+t_{2\cdot3^k}=\left(\frac{3^{k+1}+1}{2}\right)^2.$$

五十七、关于正n边形

设 $A_1A_2\cdots A_n$表示一个正n边形，试证明在此多边形内无论何处选一点O，至少有一个角A_iOA_j与平角接近到不超过角π/n：

$$\pi-\frac{\pi}{n}\leqslant\angle A_iOA_j\leqslant\pi.$$

解答　令A_1表示距离OA_i最小的那个顶点，即$OA_1\leqslant OA_i$，$i=1$，2，…，n（图72）。将A_i

图　72

与其它各顶点相联．如果 O 在某一条对角线A_1A_i上，我们立刻知道 $\angle A_1OA_i=\pi$。今设 O 位于相邻两对角线 A_1A_i 与 A_1A_{i+1} 之间，并把三角形 A_1OA_i与A_1OA_{i+1}的内角分别用 m，x，z，n，y，t 表示（图72）．因为$A_1O\leqslant OA_i$，所以$z\leqslant m$，同样由$A_1O\leqslant OA_{i+1}$知 $t\leqslant n$。因此$z+t\leqslant m+n$．但正n边形是圆内接多边形，若用C表示它的外接圆圆心，则联接相邻两顶点的弧A_iA_{i+1}在圆心C所对的角是$2\pi/n$．从而弧A_iA_{i+1}所对圆周角只有一半大，即$m+n=\pi/n$。因之$z+t\leqslant\pi/n$。

然而两个三角形中的六个角加起来等于 2π：

$$(m+n)+(z+t)+x+y=2\pi,$$

$$\frac{\pi}{n}(z+t)+x+y=2\pi\ .$$

由于$z+t\leqslant\pi/n$，所以有

$$\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n}+x+y\geqslant 2\pi,$$

即

$$x+y\geqslant 2\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\ .$$

所以x和y不能都小于$\pi-(\pi/n)$（免得其和太小），于是得证结论。

五十八、费马数

形如

$$F_n=2^{(2^n)}+1,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

的数叫费马数，得名于法国伟大的数学家皮埃尔•费马（Fermat）（1601—1665）。费马数序列的前几项是3，5，17，257，65637，…。费马数满足递推关系$F_n=F_0F_1\cdots F_{n-1}+2$。此式很容易用归纳法证明。不过下面的证法更干净利落。方法见于AMM，1935，p.569，问题E152，是康涅狄格州哈特福德联大J. 罗森包姆（Rosenbaum）提出，纽约布鲁克林的丹涅尔•芬克尔（Finkel）解答的。

注意 $2^{(2^0)}-1$就是1，于是

$$\begin{aligned}1\cdot F_0F_1\cdots F_{n-1}&=[2^{(2^0)}-1][2^{(2^0)}+1]\\&\quad[2^{(2^1)}+1]\cdots[2^{(2^{n-1})}+1]\\&=[2^{(2^1)}-1][2^{(2^1)}+1]\\&\quad[2^{(2^2)}+1]\cdots[2^{(2^{n-1})}+1]\\&=[2^{(2^2)}-1][2^{(2^2)}+1]\cdots\\&\quad[2^{(2^{n-1})}+1]\\&=\cdots\end{aligned}$$

$$=[2^{(2^{n-1})}-1][2^{(2^{n-1})}+1]$$

$$\ldots 2^{(2^{n})}-1=F_n-2\ .$$

根据这个关系式要证明每对费马数都是互素的，就是很简单的事情了.如果$m<n$，则

$$F_n=F_0F_1\cdots F_m\cdots F_{n-1}+2.$$

所以F_m与F_n的任意公约数也必除尽2．于是这样的公约数只能是1或2．然而它又不能是2，因为费马数都是奇数．所以它必然是1，这就使得F_m与F_n互素．

由于每个$F_n>1$，所以每个费马数都有一个素因子，此因子不能整除别的费马数．而费马数有无穷多，这也就从另一个角度证明了素数有无穷多个．

我们所得的结果可以用来解决下面的问题：

证明$2^{(2^n)}-1$至少可以被n个不同的素数所整除．

〔AMM，1968，p.1016，问题E 2014，纽约市布朗克斯社区大学的厄文·鞠斯特（Just）与诺曼·绍姆贝格（Schaumberger）提出.〕

解答

$$2^{(2^n)}-1=[2^{(2^n)}+1]-2=F_n-2$$

$$=F_0F_1\cdots F_{n-1}\ .$$

这是n个不同的费马数的积，它必然至少有n个不

同的素因子，因为费马数是互素的。

借讨论费马数的机会，我们来证明几个简易结果：费马数中无平方数，无立方数，而且除 $F_0=3$ 外，无三角形数。

(i) F_n不是平方数。

显然

$$(F_n-1)^2=[2^{(2^n)}]^2=2^{(2^{n+1})}=F_{n+1}-1,$$

所以

$$F_{n+1}=1+(F_n-1)^2.$$

因此，如果有 $F_n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，那也就有 $F_{n+1}\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. 但事实上有 $F_1=5\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$，这就表明$n>0$时，一切$F_n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. 然而从来不会有平方数与2(mod3)同余(因为$n\equiv 0$，1或$-1(\mathrm{mod}\,3)$，我们有$n^2\equiv 0$，1或1(mod3)。由于$F_0=3$不是平方数，所以没有一个F_n是平方数。

(ii) F_n不是立方数。

容易看出立方数同余于0，1，或$-1(\mathrm{mod}\,7)$：

$$n\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

$$n^2\equiv 0,\ 1,\ 4,\ 2,\ 2,\ 4,\ 1,$$

$$n^3\equiv 0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1.$$

费马数来说，有$F_0=3$，$F_1=5$。由

$$F_{n+1}=1+(F_n-1)^2$$

可知

如果$F_n\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$，则$F_{n+1}\equiv 5(\mathrm{mod}\,7)$，

如果 $F_n\equiv5(\text{mod}7)$，则 $F_{n+1}\equiv3(\text{mod}7)$．所以，以7为模时，费马数交替地与3和5同余，但绝不与0，1，或−1同余．因此费马数中无立方．

(iii) 没有一个 $F_n>3$ 是三角形数．

第 n 个三角形数是 $t_n=n(n+1)/2$，从而 $2t_n=n(n+1)$．今有 $n\equiv0$，1，$2(\text{mod}3)$．如果 $n\equiv0$，或 $2(\text{mod}3)$，则 n 与 $n+1$ 中之一可被3除尽，从而 $t_n\equiv0(\text{mod}3)$．另一方面，如果 $n\equiv1(\text{mod}3)$，则有 $2t_n\equiv n(n+1)\equiv2(\text{mod}3)$，这只有 $t_n\equiv1(\text{mod}3)$．所以无论怎样我们都有 $t_n\equiv0$ 或 $1(\text{mod}3)$，而这点前面我们已经看出对 >3 的费马数是不成立的．由是得证结论．

五十九、一个倒数

不等式

对自然数$n>1$，证明

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

解答

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$>\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}(n^2-n)$$

$$=\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}$$

$$=1.$$

六十、完全四次方

证明相邻8个自然数之积不是完全四次方.

解答 令x表示8个相邻自然数中最小的一个，则它们的积P可以写成

$$P=[x(x+7)][(x+1)(x+6)]\cdot[(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)]$$
$$=(x^2+7x)(x^2+7x+6)(x^2+7x+10)\cdot(x^2+7x+12).$$

令 $x^2+7x+6=a$，则

$$P=(a-6)(a)(a+4)(a+6)$$
$$=(a^2-36)(a^2+4a)$$
$$=a^4+4a^3-36a^2-144a$$
$$=a^4+4a(a^2-9a-36)$$
$$=a^4+4a(a+3)(a-12).$$

因为$a=x^2+7x+6$，且$x\geqslant1$，故$a\geqslant14$，$a-12$为正. 因此

$$P>a^4.$$

然而 $P=a^4+4a^3-36a^2-144a$ 表明P小于$(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$. 因而

$$a^4 < P < (a+1)^4,$$

这说明P始终在相邻两个四次方数之间，而绝不与其中任何一个相等。

六十一、装方块

因为调和级数是发散的，所以如果把边长为1，1/2，1/3，…，1/n，…的一组正方形并排挨着放在它们共同的基线L上，就会无穷无尽地延伸下去（图73）。但下面要证明除第一个方块外的全部方块都可以装进第一个方块而不会互相重叠。

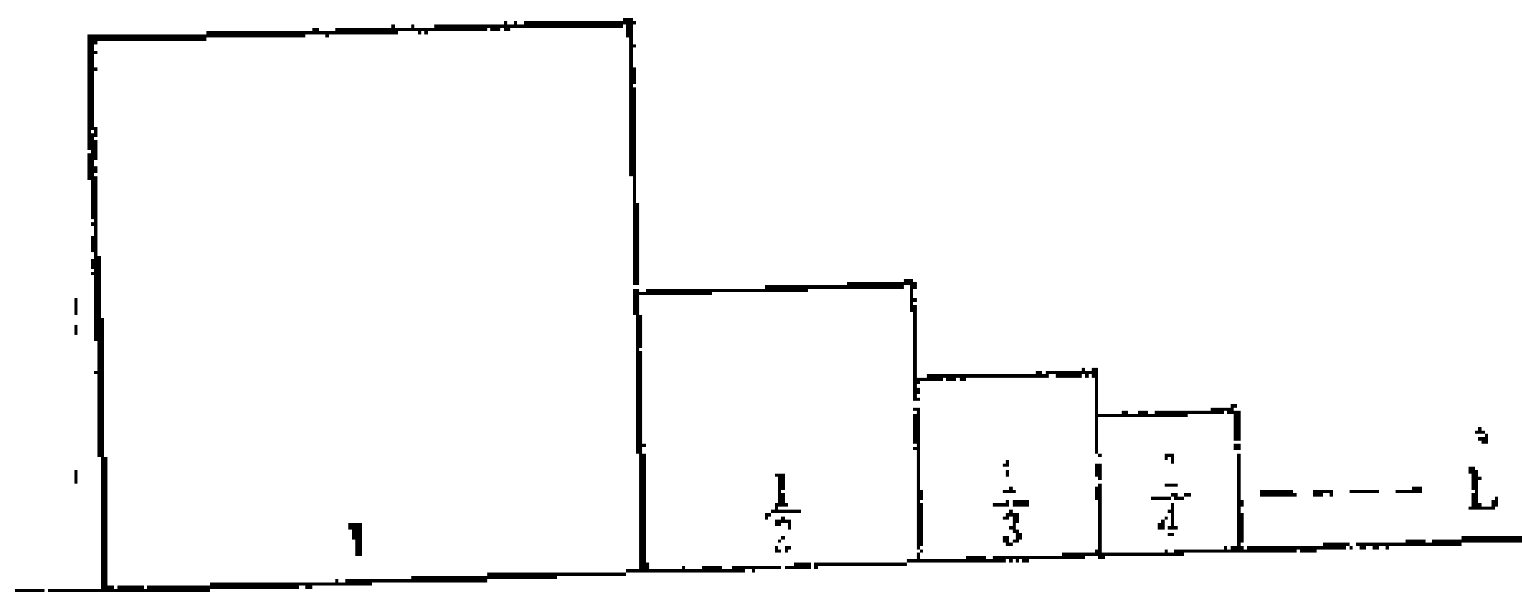


图 73

解答 沿着L把正方形分成组，每组以分母为2的方次的方块开头：$(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，$(\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7})$，…。第n组的正方形的边长之和是

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}<\underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^n\text{个}}=1。$$

因此第n组的正方形可以全部放进宽为1高为$\frac{1}{2n}$的矩形中，把包含正方形组的这些矩形一个挨一个地垒起来就得到一个矩形块，其宽为1，高为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1$$（图74）

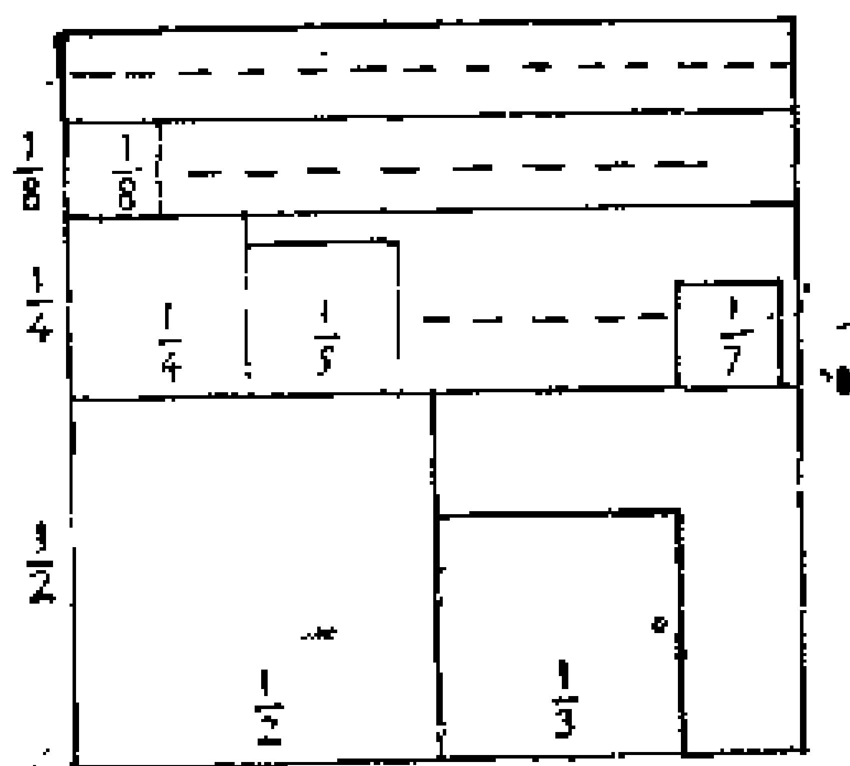


图 74

这种装法就把第一个以外的全部正方形装入了单位正方形中。

本节中我们主要关心的是下面的这个问题：

考虑一组正方形，个数有限或无限，但总面积为1。试证明无论这些正方形边长是多少，它们都可以装进一个边长为$\sqrt{2}$的正方形S中。

〔AMM，1969，p.88，问题E2041，叶什瓦大学（犹太尊经书院）D.J.纽曼（Newman）提出并解答.〕

解答 因为面积为$\frac{1}{2}$的正方形的边长是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以任何边长小于$\sqrt{2}$的正方形中都放不下面积为$\frac{1}{2}$的两个正方形。因此能装下题中所说正方形组的"万能"正方框的边长至少必须为$\sqrt{2}$（图75）

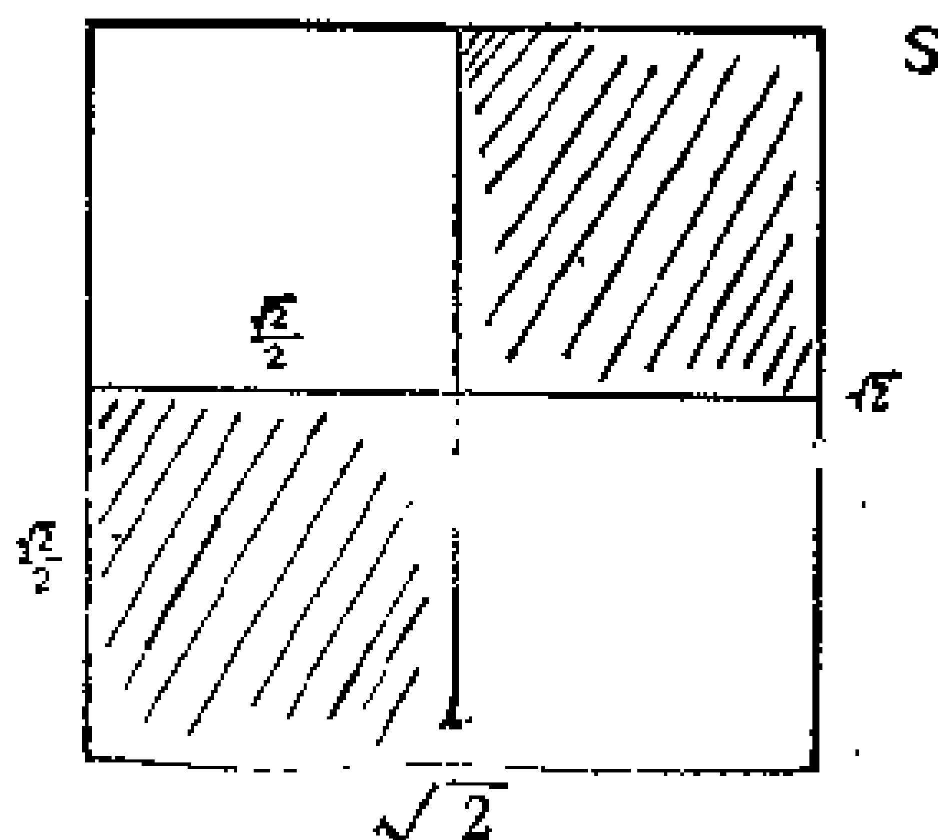


图 75

把已知的一组正方形按不增顺序排列，边长表示成

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant s_3 \geqslant \cdots,$$

并且就干脆把边长为s_i的正方形称为正方形s_i。框架S的边或水平或铅直地放置。从左下角开始按递减顺序沿方框底边放置正方形s_1，s_2，…直到放不下为止。把第一个也即最大一个正方形s_1的上边在S内延长，作为刚放好的一排正方形这一层的顶层（图76）。又从左端开始在第一层层顶上放第二排，仍然按递减的顺序一个个地放入正方形，放满

为止。照样把本层第一个正方形的顶线向右延长作为本层的顶部。象这样一排一排地放，我们将会发现整个正方形组都可以放进正方形S中。

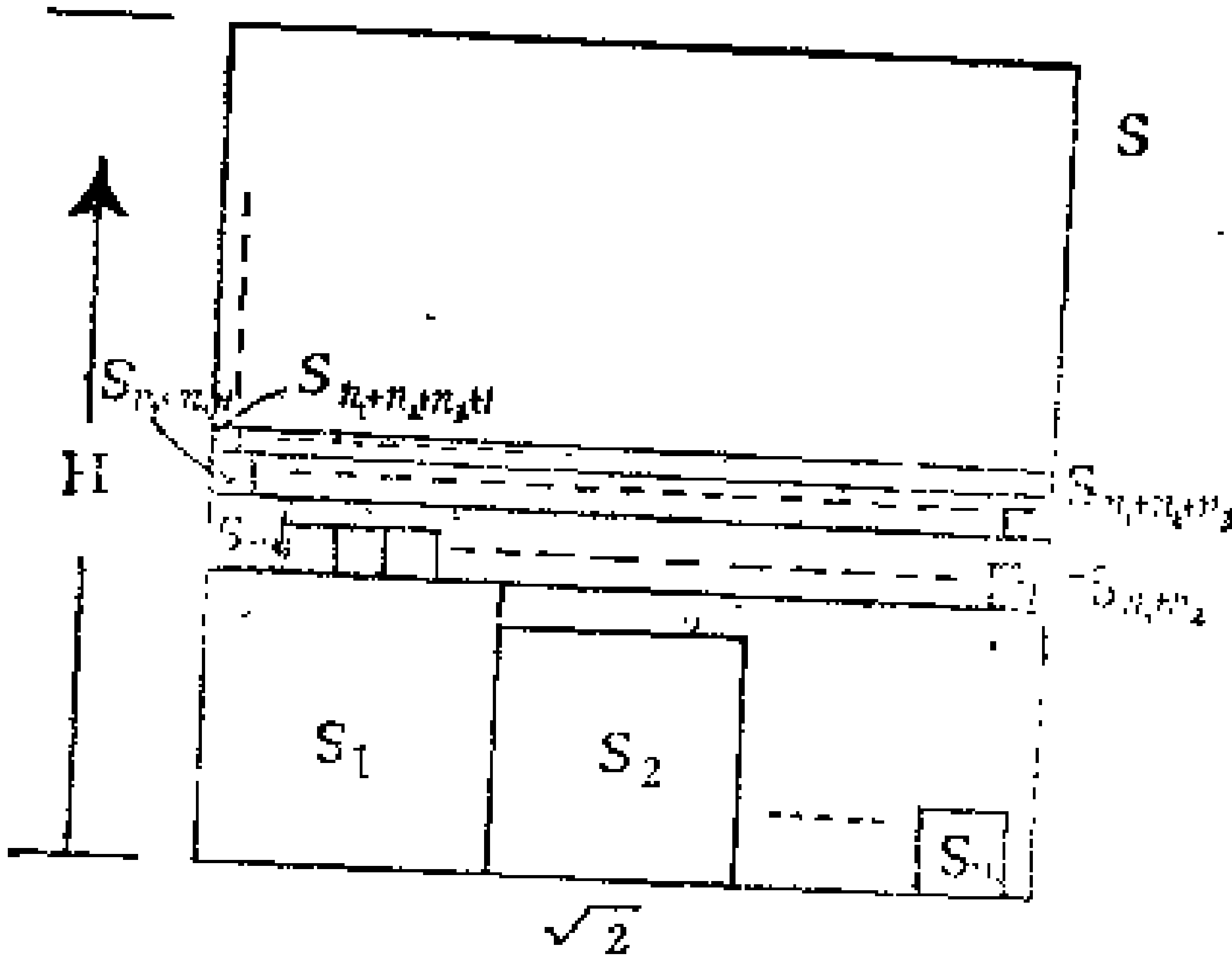


图 76

设第r排的正方形个数是n_r，则各排的正方形个数分别为：

第 1 排有正方形s_1，s_2，$\cdots s_{n_1}$；

第 2 排有正方形s_{n_1+1}，s_{n_1+2}，$\cdots$，$s_{n_1+n_2}$；

第 3 排有正方形 $s_{n_1+n_2+1}$，$s_{n_1+n_2+2}$，$\cdots$，$s_{n_1+n_2+n_3}$；……

我们证明按这种装法不会装出S的顶部以外去，这意味着S能装下全部正方形，为此我们来证明，在S左边量得各排垒成的总高度H不会超过$\sqrt{2}$：

$$H=s_1+s_{n_1+1}+s_{n_1+n_2+1}+\cdots\leqslant\sqrt{2}。$$

因全部正方形总面积为1，故

$$1\geqslant s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots,$$

这表明S确能容纳第一排。如果一排就够了，问题就解决了。因之我们来考虑不止需要一排的一般情况。当然我们还是需要用总面积为1这个条件.先推导n个关于s_i^2的关系式。

由于第二排第一个正方形是因为太大了第一排末尾放不下才放到第二排开头的，所以

$$s_1+s_2+\cdots+s_{n_1}+s_{n_1+1}>\sqrt{2},$$

故

$$s_2+\cdots+s_{n_1+1}>\sqrt{2}-s_1.$$

乘以s_{n_1+1}得

$$s_2\cdot s_{n_1+1}+s_3\cdot s_{n_1+1}+\cdots+s_{n_1+1}\cdot s_{n_1+1}>$$
$$(\sqrt{2}-s_1)\ s_{n_1+1}.$$

而$s_2\geqslant s_3\geqslant s_4\geqslant\cdots\geqslant s_{n_1+1}$，故

$$s_2^2+s_3^2+\cdots+s^2_{n_1+1}$$
$$=s_2\cdot s_2+s_3\cdot s_3+\cdots+s_{n_1+1}\cdot s_{n_1+1}$$
$$\geqslant s_2\cdot s_{n_1+1}+s_3\cdot s_{n_1+1}+\cdots+s_{n_1+1}\cdot s_{n_1+1}$$
$$\geqslant(\sqrt{2}-s_1)\ s_{n_1+1},$$

即

$$\boxed{s_2^2+s_3^2+\cdots+s_{n_1+1}^2>(\sqrt{2}-s_1)\ s_{n_1+1}}$$

对于第二排我们同样也有

$$s_{n1+1}+s_{n1+2}+\cdots+s_{n1+n2}+s_{n1+n2+1}>\sqrt{2},$$

故

$$s_{n1+2}+\cdots+s_{n1+n2}+s_{n1+n2+1}>\sqrt{2}-s_{n1+1}.$$

乘以 $s_{n1+n2+1}$ 并注意到 $s_{n1+2}\geqslant\cdots\geqslant s_{n1+n2+1}$，完全象第一排的情况那样得到

$$s^2{}_{n1+2}+s^2{}_{n1+3}+\cdots+s^2{}_{n1+n2+1}>(\sqrt{2}-s_{n1+1})s_{n1+n2+1}.$$

因为 $s_1\geqslant s_{n1+1}$，由此得

$$\boxed{s^2{}_{n1+3}+\cdots+s^2{}_{n1+n2+1}>(\sqrt{2}-s_1)s_{n1+n2+1}}.$$

对于第三排也同样可得

$$\boxed{s^2{}_{n1+n2+2}+s^2{}_{n1+n2+3}+\cdots+s^2{}_{n1+n2+n3+1}>(\sqrt{2}-s_1)\ s_{n1+n2+n3+1}}$$

如此一直下去，对所有的排都求得类似的不等式。把这些不等式相加得

$$s^2{}_2+s^2{}_3+\cdots>(\sqrt{2}-s_1)(s_{n1+1}+s_{n1+n2+1}+\cdots).$$

因为总面积是1，又右端第二个因子就是 $H-s_1$，所以

$$1-s^2{}_1>(\sqrt{2}-s_1)\ (H-s_1),$$

$$H-s_1<\frac{1-s^2{}_1}{\sqrt{2}-s_1},$$

故

$$H<\frac{1-\bar{s}_1^{\,2}}{\sqrt{2}-s_1}+\bar{s}_1.$$

很容易用化简的办法证明

$$\sqrt{2}-\frac{(1-\sqrt{2}s_1)^2}{\sqrt{2}-s_1}=\frac{1-\bar{s}_1^{\,2}}{\sqrt{2}-s_1}+\bar{s}_1,$$

所以

$$H<\sqrt{2}-\frac{(1-\sqrt{2}s_1)^2}{\sqrt{2}-s_1}\leqslant\sqrt{2}.$$

即得需要的不等式$H<\sqrt{2}$.

六十二、红球与绿球

袋中有6个红球与8个绿球．任意抓出5个球放进一个红盒子中，其余9个球放进一个绿盒中．红盒中绿球个数加绿盒中红球个数之和不是素数的概率有多大？

解答　用g表示红盒中绿球的个数．总共有6个红球8个绿球，因此色球在盒中的分布情况一定如图77所示．于是绿盒中的红球个数加上红盒中的绿球个数$=(g+1)+g=2g+1$，这是奇数．但是g不会超过红盒中球的总数5，故$1\leqslant 2g+1\leqslant 11$．

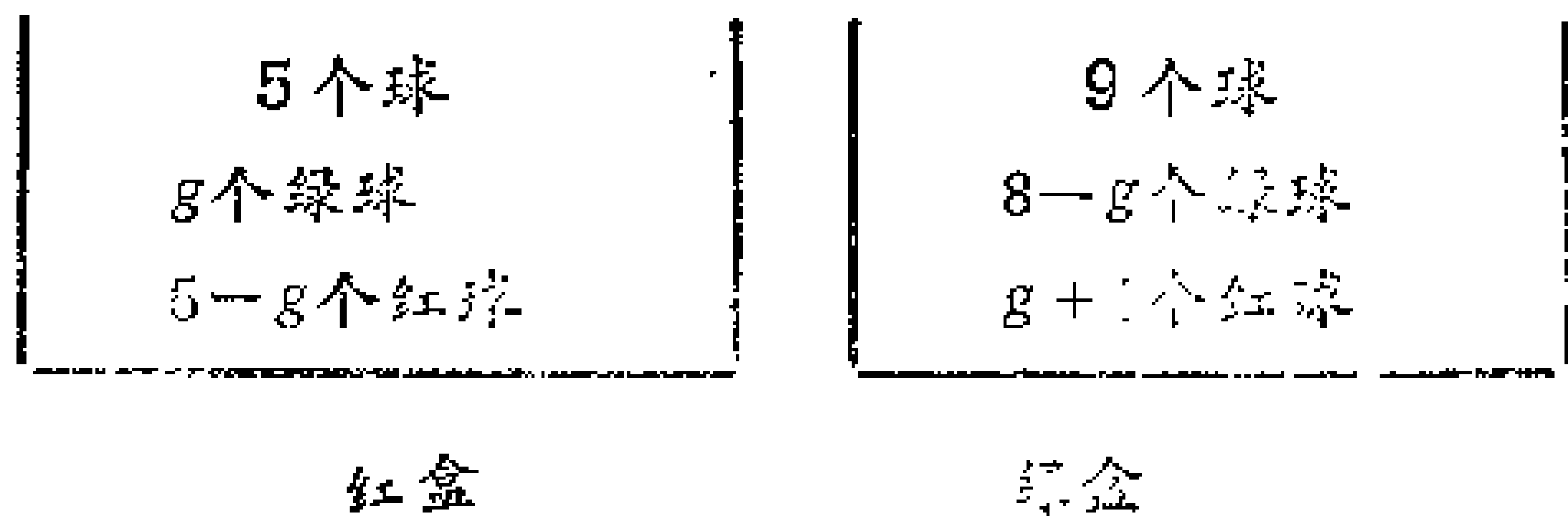


图　77

在这个范围内的奇复合数只有9．不过我们也得把1包括进去，因为它既不是素数也不是复合数．要取非素数值，$2g+1$就必须等于1或9．因此g必

须等于0或4．$g=0$或4时，抓球的概率是

$$\frac{(5\text{个红球全抓的抓法数})+(4\text{黑}1\text{红的抓法数})}{\text{抓的总次数}}$$

$$=\frac{C_6^5+C_8^4C_6^1}{C_{14}^5}=\frac{6+420}{2002}=\frac{213}{1001}.$$

六十三、算术级数中的复合数项

155页问题五十四说的是在自然数序列中有任意长的许多段相邻复合数。我们在这一问题中要证明有任意长的算术级数，其各项均为复合数且两两互素。

解答 我们证明，对任何自然数$n>1$，在算术级数中存在两两互素的n个复合数.

任选一个比指定的n大的素数p.然后选一个尽量大的数$p+(n-1)n!$，并选整数N使得

$$N>p+(n-1)n! .$$

于是我们可以断言，下面的n个数(可能是很大的)

$N!+p$, $N!+p+n!$, $N!+p+2\cdot n!$, …, $N!+p+(n-1)n!$

就满足所需条件. 显然这些数都在公差为$n!$的算术级数中. 因为选取的N使得$N>p+(n-1)n!$. 所以对$i=0,1,2\cdots,n-1$，就有$p+i\cdot n!<N$，这表明($p+i\cdot n!$)这个数是$N!$的一个因子. 所以$N!+p+i\cdot n!$ $i=0,1\cdots,n-1$，可以被较小的数$p+i\cdot n!$(这个数大于1)除尽，因而是个复合数。

又设有两项

$N!+p+i\cdot n!$ 与 $N!+p+j\cdot n!$，$i>j$，

有公共素因子q，则q能除尽其差$(i-j)n!$．但$i-j<n$，故$(i-j)n!$的每个素因子都$\leqslant n$，于是$q\leqslant n$，从而$q|n!$．但$N>n$，因而q整除大数目$N!$．因q能除尽$N!+p+i\cdot n!$，所以也必能除尽p，但这是不可能的，因为p与q都是素数，并且$q\leqslant n<p$．问题得证。

六十四、把等边三角形联结起来

边长为1，3，5…，$2n-1$，…的等边三角形沿着一条直线首尾相接地放成一条线（图78）．试证明不在直线上的各顶点都在一条抛物线上，并且它们的焦半径都是整数．

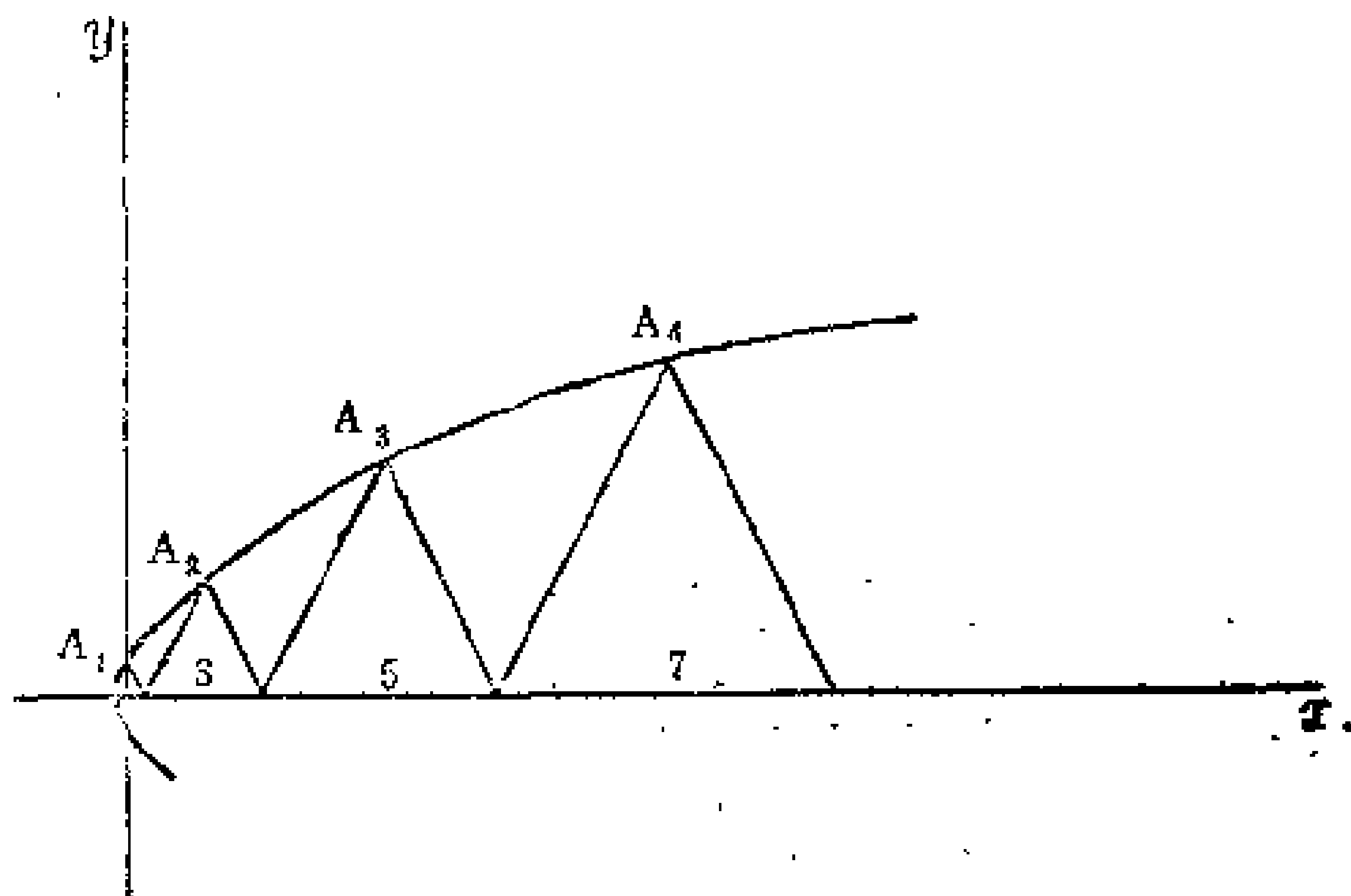


图 78

解答 把各顶点依次表示成A_1，A_2，…，选已知直线作x轴，并让y轴通过A_1．于是A_1的坐标为$(0,\sqrt{3}/2)$．第n个三角形的底边等于$2n-1$，故A_n的横坐标为

$$x=\frac{1}{2}+3+5+\cdots+(2n-3)+\frac{1}{2}(2n-1),$$

这可立刻化简为$x=n(n-1)$. A_n的纵坐标就是A_1的纵坐标的$2n-1$倍，即

$$y=(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由此得

$$n=\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}+1\right),$$

故 $$n-1=\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}-1\right).$$

所以

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}+1\right)\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4y^2}{3}-1\right),$$

$$12x=4y^2-3,\ 即4y^2=12x+3.$$

这是轴为横轴，顶点为（$-1/4,0$）的抛物线方程。把坐标轴向负方向平移$\frac{1}{4}$个单位，即按

$$X=x+\frac{1}{4},\ Y=y$$

作坐标平移，抛物线方程就化成

$$4Y^2=12\left(X-\frac{1}{4}\right)+3=12X,\ 即\ Y^2=3X.$$

我们立刻看出，这时的抛物线顶点在坐标原点，焦点在（3/4，0）.所以回到原位，抛物线的焦点一定是在（$\frac{1}{2}$，0）（第一个三角形的一个顶点）．于

是A_n的焦半径由下式给出：

$$\sqrt{\left[n(n-1)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2}$$

$$=n^2-n+1,$$

这是一个整数。

六十五、测验

甲、乙、丙三个同学在几项测验中比赛．在一项测验中得第一名时，打x分；得第二名打y分；得第三名打z分．这里x，y，z都是自然数并且$x>y>z$．在每项测验中他们得分都不相同．甲总分为20分，乙为10分，丙为9分．学生甲在代数测验时是第二名．试问几何测验时谁是第二名？

解答　他们三人总共得到39分．因为x，y，z是不同的自然数，所以每项测验至少要打$1+2+3=6$分．$x+y+z$必能整除总分39．问题里明确提到的测验有两项，所以$x+y+z\neq39$．由于39除本身外的因子是1，13，并且其因子$x+y+z\geqslant6$，所以必然有

$$x+y+z=13,$$

这说明共举行过三项测验．

由于甲在代数测验时是第二名，所以他的分数中有一次是y分．如果甲还有一次测验是得的z分，那末他在剩下那次只能是x分，于是总共得$y+z+x=13$．然而事实上甲的总分是20分，因此他在各

项测验中不会得z分．所以甲的分数构成情况或为$3y$，或为 $x+2y$，或为 $2x+y$．因3不能除尽20，故不可能是$3y$．如果得分是 $x+2y$，则

$$x+2y=x+y+y=20,$$

而
$$x+y+z=13,$$

两式相减得 $y-z=7$．由于 $x>y>z$，故$y\geqslant 8$，$x\geqslant 9$，因而 $x+y\geqslant 17$，这与 $x+y+z=13$ 矛盾．所以甲得分构成情况必然是 $2x+y=20$．

由此可知，y必为偶数．如果$y\geqslant 6$，那末$x\geqslant 7$，从而$x+y\geqslant 13$，这样就使 $x+y+z=13$中的z无容身之地了，所以y只能是2或4．

若$y=2$，则更小的z必然等于1．于是满足$x+y+z=13$ 的 $x=10$．然而这样一来甲的得分将是$2x+y=22$而非20了所以 $y=4$，由 $2x+y=20$得$x=8$，由 $x+y+z=13$ 得$z=1$．

只有一种方式这几个数才能使三位学生各自的总分分别为20，10，19：

	(i)	(ii)	(iii)	总计
甲	8	8	4	20
乙	1	1	8	10
丙	4	4	1	9

因为甲不是第二名时丙就是第二名，所以在几何测验时丙一定是第二名．

六十六、托勒密定理的一个应用

托勒密（Ptolemy）定理说，圆内接四边形对角线长度的乘积等于两对对边边长乘积之和（关于证明，请参看任何一本综合几何教材）．用这条定理可立即证明下述结果：

令$A_1A_2A_3$表示圆内接正三角形．若P为圆周上任意一点，证明PA_1，PA_2，PA_3中两段较短线段加起来等于第三条线段长．

证明　令s表示已知三角形的一边长．如图79，由托勒密定理得

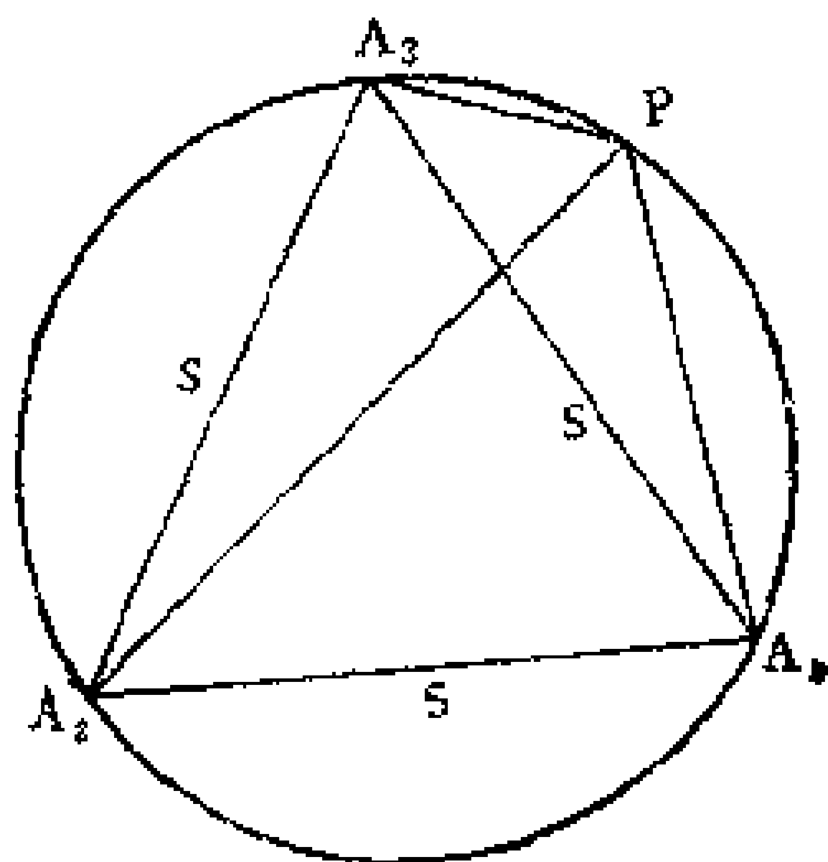


图　79

$$s\cdot PA_2=s\cdot PA_1+s\cdot PA_3,$$

于是

$$PA_2=PA_1+PA_3$$

本节中我们讨论上述命题的两则推广.

(i)〔AMM，1933，p. 501，问题3583，纽约H·格罗斯曼（Grossman）提出，洎丢大学劳伦斯·赫得利(Hadley)解答.〕

命 $A_0A_1\cdots A_{3n-1}$ 表示圆内接正 $3n$ 边形. 由圆周上任一点P到$3n$个顶点作若干条弦(图80).

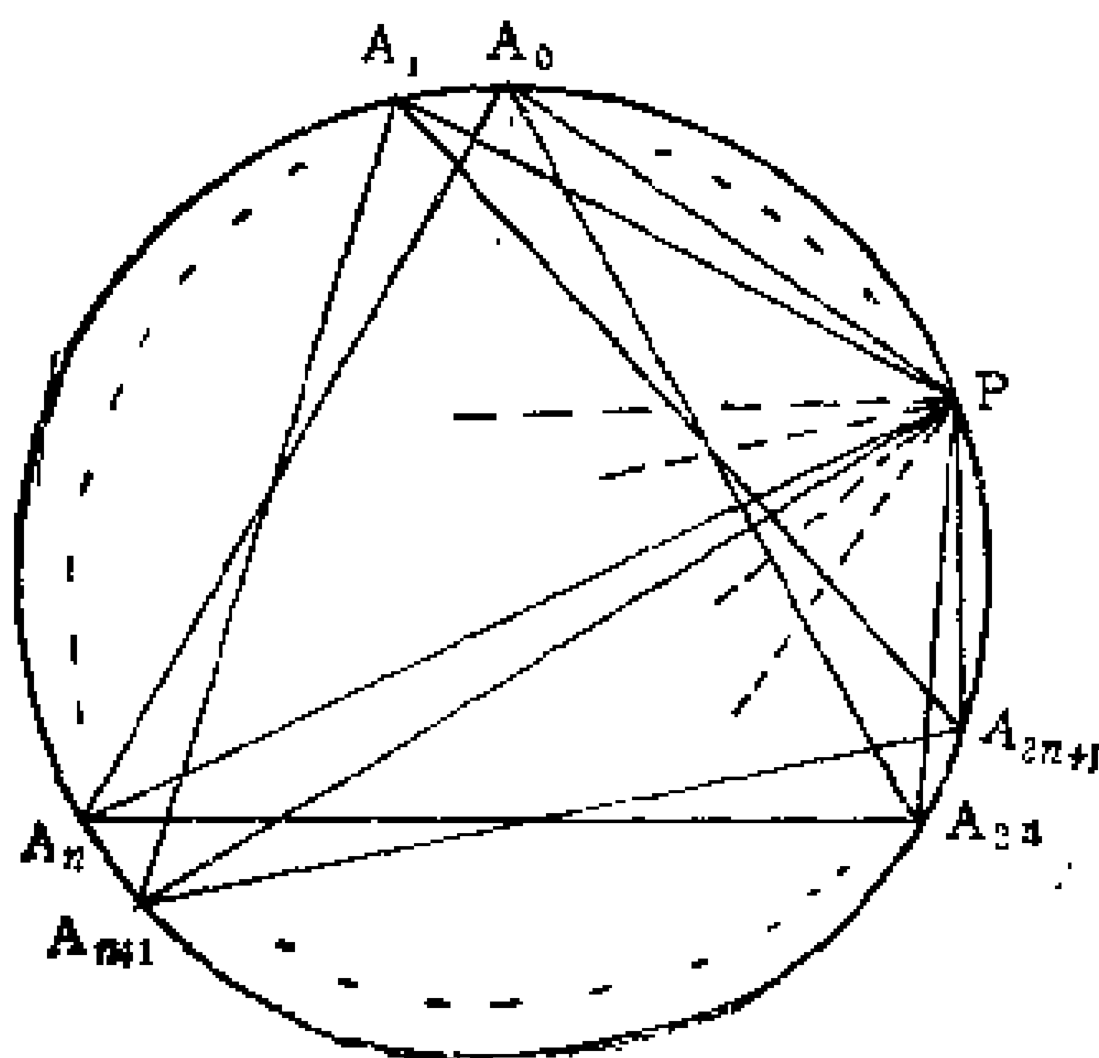


图 80

证明n条最长的弦的和等于其余$2n$条短弦之和.

解答 取正$3n$边形的三个顶点确定一个圆内接等边三角形，总共得到n个等边三角形. 对于每个

三角形相应的（顶点与P联成的）三条弦来说，两条短弦弦长之和等于第三条弦弦长．可以看到，每组弦中的两条短弦弦长都$\leqslant s$（等边三角形边长），而长弦弦长都$\geqslant s$．从每三条弦中取一条最长的弦，可得到n条长弦，余下$2n$条短弦．引用前面的基本命题便可证明，n条长弦弦长之和等于剩下的$2n$条短弦弦长之和．

(ii).〔下述结果的$n=3$和5这两个特例是纽约大学威廉·威尔尼希（Wernich）得出的；而一般情形则是滑铁泸大学勒内·狄基（Dickey）得出的.〕

设$A_1A_2\cdots A_n$是正n边形，n为奇数，P为它的外接圆上的任一点．设字母符号如图81标出，P就在弧A_nA_1上．令$PA_i=a_i$．试证明：

当我们交替地加、减从P引出的线段，即：

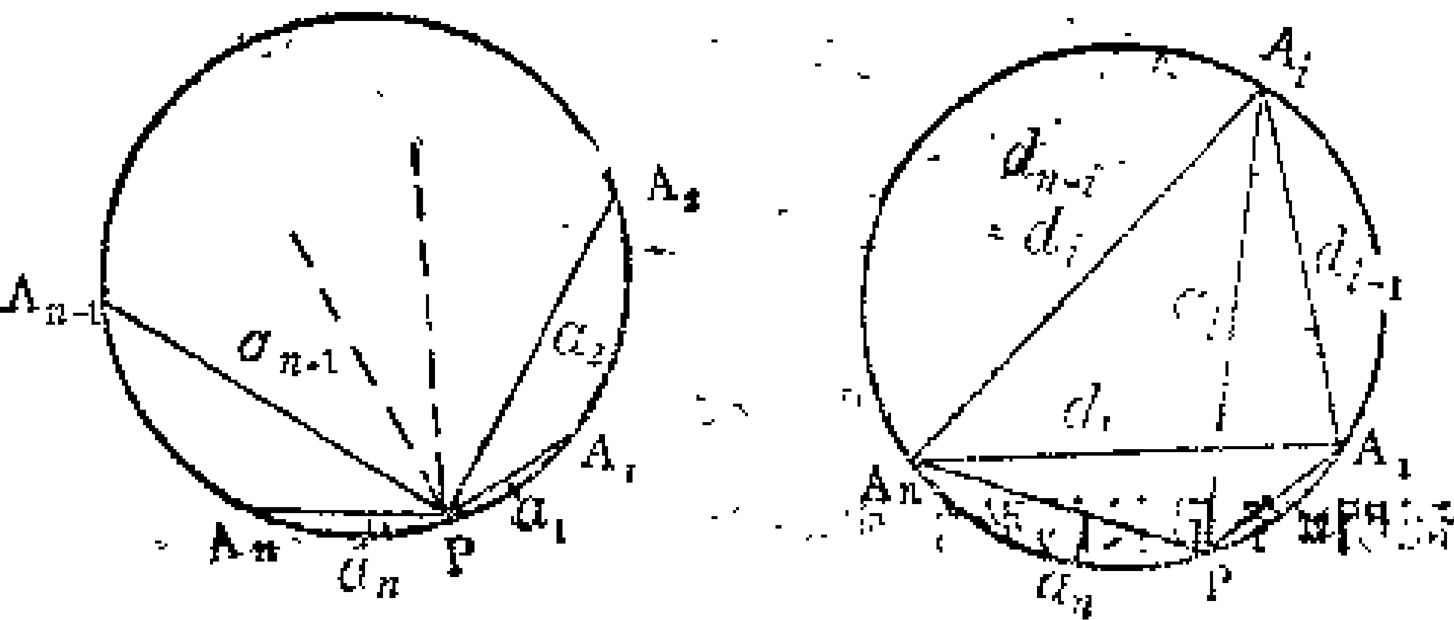


图 81

$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-\cdots+a_n$,
我们得到的始终是0.

解答 当$n=3$时，就是前面得到的基本命题. 在那里只用一次托勒密定理就够了，为证明推广的结果我们不妨反复地用这条定理.

用d_i表示把正n边形分成一侧为i边另一侧为$n-i$边的对角线长，则对全部的i都有$d_i=d_{n-i}$。注意，d_1就是n边形的一条边. 于是四边形$A_nPA_1A_i$的边和对角线就表示成图81(右)那样. 根据托勒密定理，我们有

$$d_1a_i=d_ia_1+d_{i-1}a_n.$$

令$i=2, 3, \cdots, n-1$就得到$n-2$个结果，再在前面放上恒等式$d_1a_1=d_1a_1$，后面放上$d_1a_n=d_{n-1}a_n$，就得到一组共n个方程

$$d_1a_1=d_1a_1$$
$$d_1a_2=d_2a_1+d_1a_n$$
$$d_1a_3=d_3a_1+d_2a_n$$
$$d_1a_4=d_4a_1+d_3a_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_1a_{n-1}=d_{n-1}a_1+d_{n-2}a_n$$
$$d_1a_n=d_{n-1}a_n.$$

从上到下交替加减即得

$$d_1(a_1-a_2+\cdots-\cdots+a_n)$$
$$=(a_1-a_n)(d_1-d_2+d_3-d_4+\cdots-\cdots+d_{n-2}$$

$-d_{n-1}$）（之所以是 $-d_{n-1}$ 是因为 $n-1$是偶数）。由于 $d_1=d_{n-1}$，$d_2=d_{n-2}$，…，所以$d_1-d_2+d_3-d_4+\cdots-\cdots+d_{n-2}-d_{n-1}=0$。于是得

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-\cdots+a_n=0.$$

六十七、又一个丢番图方程

设y与z是自然数，满足方程

$$y^3+4y=z^2,$$

证明y等于2倍平方数.

解答 令k^2表示整除y的最大平方数，并设$y=nk^2$. 于是n绝无重因子，否则就有大于k^2的一个平方数能除尽y.由

$$y^3+4y=z^2$$

推出

$$y(y^2+4)=z^2,$$

$$nk^2(y^2+4)=z^2,$$

这表明

$$k^2|z^2,\ \text{因而}\ k|z.$$

令$z=mk$，则$nk^2(y^2+4)=m^2k^2$，即$n(y^2+4)=m^2$. 这说明$n(y^2+4)$是一个完全平方.但是n是没有重因子的，所以n的全部因子必然要在y^2+4中出现，这就是说

$$n|y^2+4.$$

由于$y=nk^3$，所以

$$n|n^2k^4+4，因而\ n|4.$$

于是 $n=1，2，$ 或4.因为n不含重因子，故$n\neq 4$.要是n为1，那末由 $n(y^2+4)=m^2$得

$$y^2+4=m^2$$

然而实际上不存在相差为4的两个平方数，所以如果原方程有解的话，n只能等于2.这样一来y就是一个平方数的两倍了.

我们指出 $y=2(=2.1^2)，z=4$ 就是解，而且可以证明是唯一的自然数解.

六十八、复数的一个不寻常的性质

当 $x=1+i\sqrt{3}$，$y=1-i\sqrt{3}$，$z=2$（$i=\sqrt{-1}$）时，下面三式是成立的：

$$x^5+y^5=z^5,\quad x^7+y^7=z^7,\quad x^{11}+y^{11}=z^{11}$$

现在请你证明上式的令人吃惊的推广：对于如上选定的 x，y，z 的特定值，方程

$$x^p+y^p=z^p$$

对一切素数 $p>3$ 都成立。

解答 作简易的计算便知道 x^6 与 y^6 都等于 2^6。因为 $6n$，$6n+2$，$6n+3$，$6n+4$ 都不是素数，大于3的素数必形如 $6n+1$ 或 $6n-1$。

若 $p=6n+1$，则

$$\begin{aligned}x^p+y^p&=x^{6n+1}+y^{6n+1}\\&=(x^6)^n\cdot x+(y^6)^n\cdot y\\&=2^{6n}\cdot x+2^{6n}\cdot y\\&=2^{6n}(x+y).\end{aligned}$$

因 $x+y=2$，故

$$x^p+y^p=2^{6n}\cdot 2=2^{6n+1}=z^p.$$

注意

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}=\frac{1}{z},$$

我们便可类似地证明方程对 $p=6n-1$ 也成立。

六十九、圆链

半径为1千米的圆C_0与直线L切于Z(图82)。

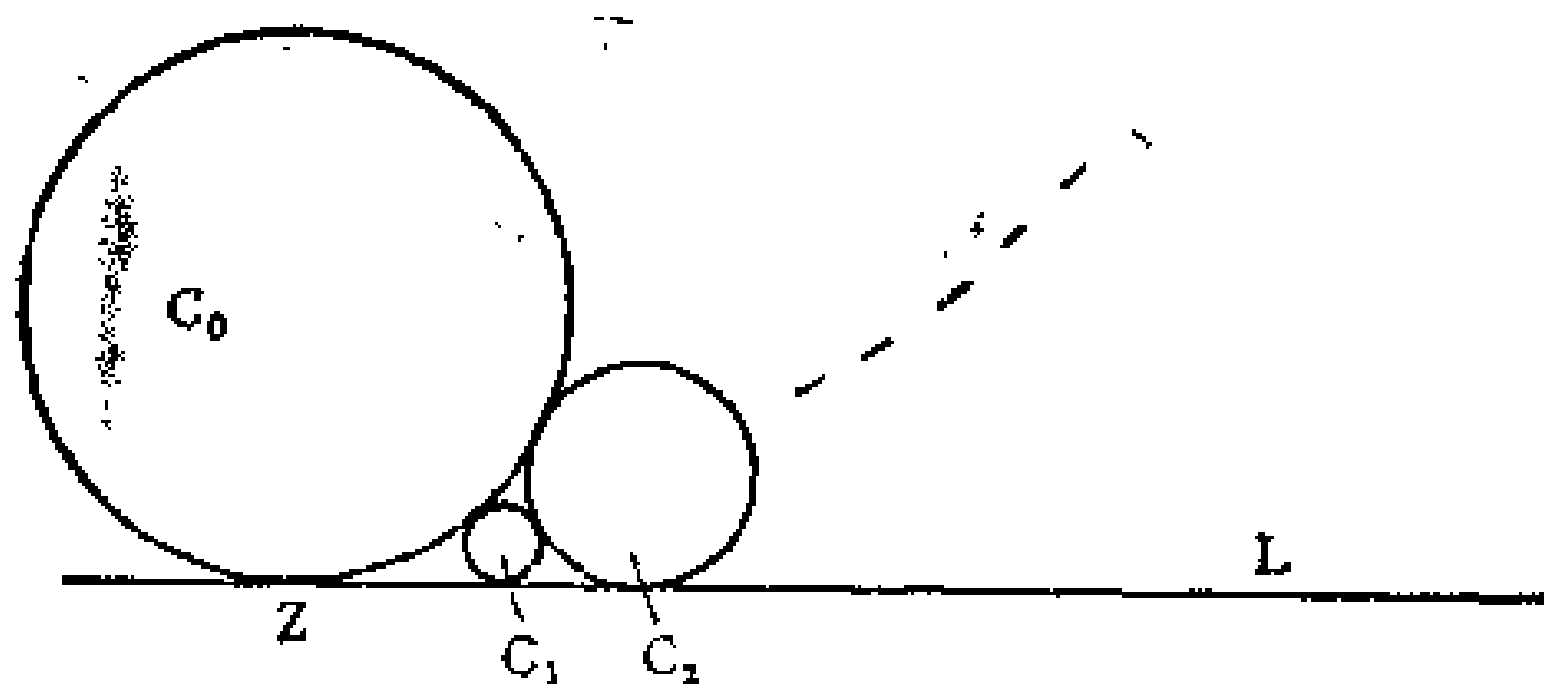


图 82

在C_0的右侧作一个半径为1毫米的圆C_1与C_0和L相切．在外侧右边作一族圆C_i，使每个圆C_i都与C_0，L和C_{i-1}相切．这些圆越来越大，最后，圆的个数再也不能增多了．试问这种圆至多能作多少个？

解答　约定距离的单位用毫米，那末圆C_1的半径为1，C_0的半径为10^6。把这族圆关于Z为中心，$2\cdot10^6$为半径的圆I作反解(图83)．〔关于圆反演，请参阅参考文献．〕因为L通过了反演中心Z，所以它就反演成它自已．而I与C_0相内切，不妨设切点为X，因C_0通过Z，故反演后的像是一条直线C_0'即

I与C_0在X处的公切线。于是L与C_0'就是C_0的切线，分别在同一直径的两端与C_0相切。因此L与C_0'平行，组成平面上的一条带子S.

图 83

由于这族圆中的每一个圆C_i都与C_0和L相切，所以它们每一个的像C_i'也就与S的两条边相切。除C_0外，这族圆中没有一个通过Z，所以像C_i'都是圆。这样一来，这族圆中两两相切的圆的像就组成了一排等圆，它们两两相切，以S的两边为界。全部像圆都和C_0一样大。因为C_1在反演圆I内靠近圆心Z，所以它的像就在I的反面，在条带S的远离I的地方。i依次取值1，2，3，…时，这一排像圆就沿着S向C_0靠拢。

设C_1与C_1'分别在Y与Y'与L相切。用毕达哥拉斯定理很快就知道 $ZY=2\cdot 10^3$(图84)。于是由反演关系知

$$PR=10^6+1,\quad PQ=10^6-1$$

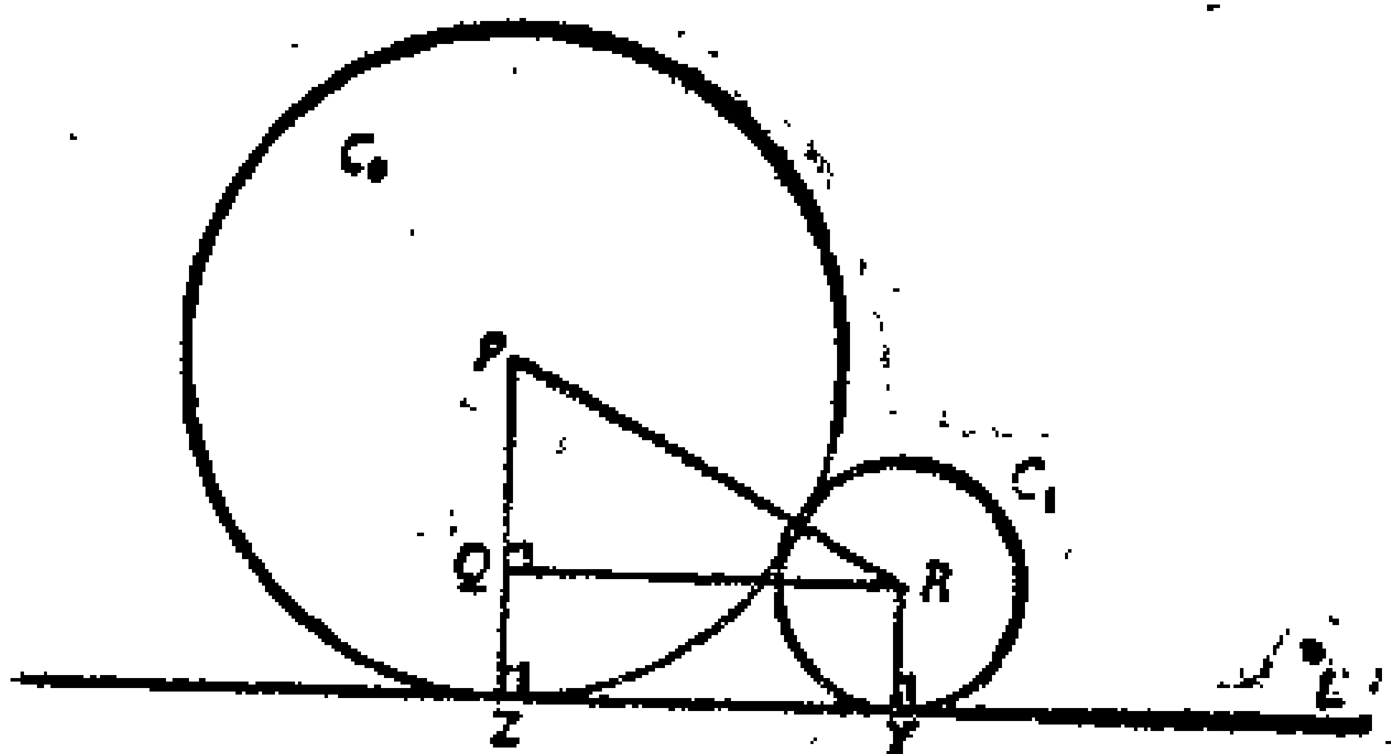


图 84

故 $ZY=QR$

$$=\sqrt{(10^6+1)^2-(10^6-1)^2}$$

$$=\sqrt{4\cdot10^6}=2\cdot10^3.$$

$$ZY\cdot ZY'=(2\cdot10^6)^2$$

$$2\cdot10^3(ZY')=4\cdot10^{12}$$

$$ZY'=2\cdot10^9=1000(2\cdot10^6),$$

这是1000个C_1'的直径.

所以从C_1'到C_0恰好可容下1000个圆．也就是说 C'_{1000}正好与C_0相切.

但是不难看出，关于I作反演后C'_{1000}就是自己的像．由于I的半径是C_0和C'_{1000}中任何一个的半径的两倍，而C_0与C'_{1000}又切于T点，所以T在C_0'上的像T'由于Z，T共线的缘故，就正好位于C'_{1000}与L的切点W的上方．这个点W也就是I与L的交点．因此C'_{1000}的三个点T，T'及W分别反演成了T'，T及W，这说明C'_{1000}变成了它自己．结

论就是：$C_{1000} \equiv C'_{1000}$与$C_0$大小一样. 在画这族圆时，越到后面圆越大，到达$C_{1000}$时就变成和最初的圆$C_0$一样大. 所以圆的链环到此再也无法多加一个圆了. C_{1000}就是这个链环中的最后一环的那个圆.

注意，我们这族圆组成了（关于C_0，L的）施坦纳（Steiner）链环的一部分，这里把直线L看成半径是无穷大的圆.

参 考 文 献

Coxeter and Greitzer, Geometry Revisited, vol 19, New Mathematical Library, Math. Assoc. of America, p.108 ff.

七十、完全平方数末尾的重复数字

试问完全平方数末尾非零相同数字最多有多少个？并求出一个最小的这种平方数。

解答 对任意自然数n均有

$$n\equiv 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4\ \text{或}\ 5 \pmod{10}$$

故

$$n^2\equiv 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6\ \text{或}\ 5 \pmod{10}.$$

所以一切平方数的末尾都不会是2，3，7，8．于是我们只消研究1，4，5，6，9这几个数字．由于n要么是偶数，要么是奇数，所以

$$n^2=(2a)^2=4a^2,\ \text{或}\ n^2=(2a+1)^2$$
$$=4(a^2+a)+1,$$

这表示，$n^2\equiv 0$或$1 \pmod 4$．因为数目字

$$ab\cdots cxy=ab\cdots c00+xy\equiv xy \pmod 4),$$

可以看出，平方数不会以11，55，66或99为结尾，因为这几个都$\equiv 2$或$3 \pmod 4$．所以平方数末尾的相同非零数字只可能是4．

只要一个平方数的末尾有4个4，那末

$$n^2=ab\cdots c4444=ab\cdots c0000+4400+44.$$

因为 $16|10000$，$16|4400$，所以 $n^2\equiv12 \pmod{16}$．若以16为模，就有 $n\equiv0$，±1，±2，±3，±4，±5，±6，±7或8，由此就有

$n^2\equiv0$，1，4，9，0，9，4，1，或0，但绝不是12．

因此平方数末尾至多只能有三个非零相同数字．444不是平方数，我们发现

$$1444=38^2,$$

这个数末尾是3个4，也是最小的这种平方数．

七十一、一条分角线

在$\triangle ABC$中 $AC=BC$ 以C为心 作半径$<AC$的圆K(图85).试在K上求一点P，使其切线平分角APB.

图 85

解答 令人惊讶的是，对问题中的任何圆K，点P都在$\triangle ABC$的外接圆S上(图86).

令CD为S的过C的直径，则$\angle CPD$为直角，PD就成了在P点切于K的切线.但是，因为$AC=BC$，故CD平分$\angle ACB$,因而D平分弧AB.所以$\angle APD=\angle DPB$.

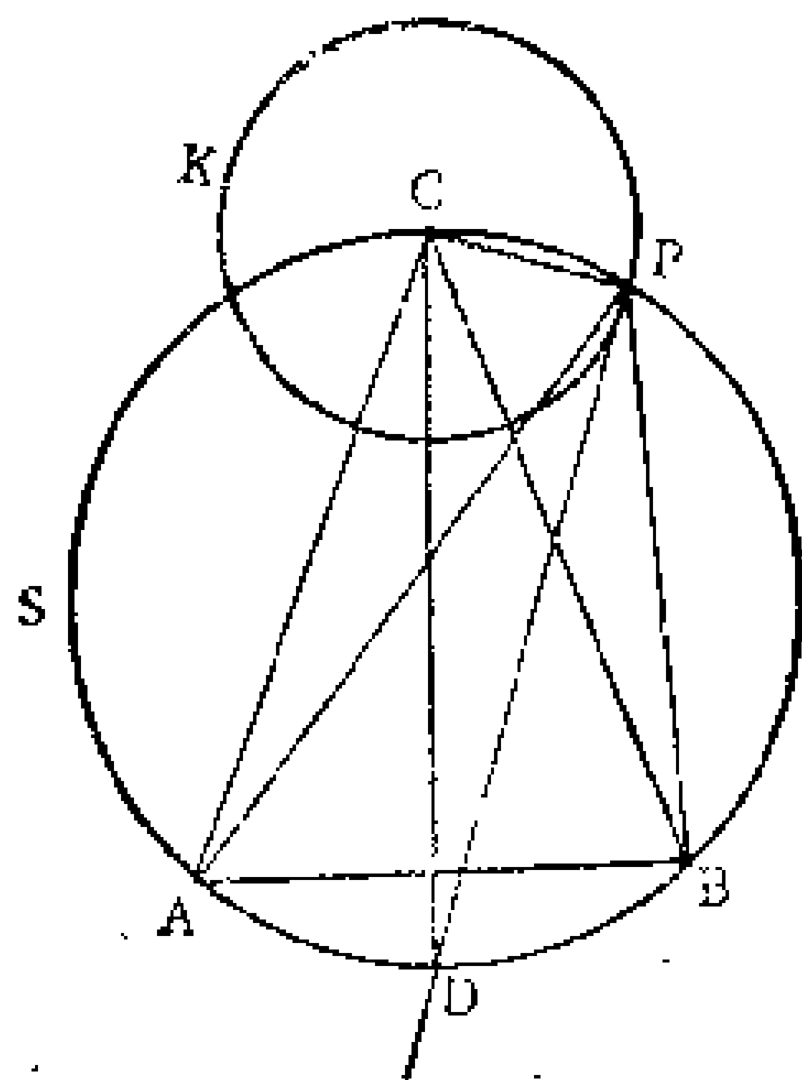


圖 86

七十二、不等式组

设下列联立不等式组有解x存在，问整数n最大是多少？

$$k<x^k<k+1，k=1，2，3，\cdots，n；$$

$$1<x<2$$

$$2<x^2<3$$

$$3<x^3<4$$

$$4<x^4<5$$

…………？

解答　n最大是4．如果有x满足了前5个这种不等式，那末由第3式得

$$3<x^3,$$

又从第5式得 $x^5<6$．于是得到

$$3^5<x^{15}<6^3,$$

这就等于是要求 243<216．因此应该 $n\leqslant 4$．

由于$\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$，所$\sqrt[3]{3}$与$\sqrt[4]{5}$之间的任何x满足前4个不等式．

七十三、正26边形的一个意想不到的性质

在以O为心的一个圆内有一个内接正26边形$A_1A_2\cdots A_{26}$(图87).圆心O关于弦$A_{25}A_1$与A_2A_6的

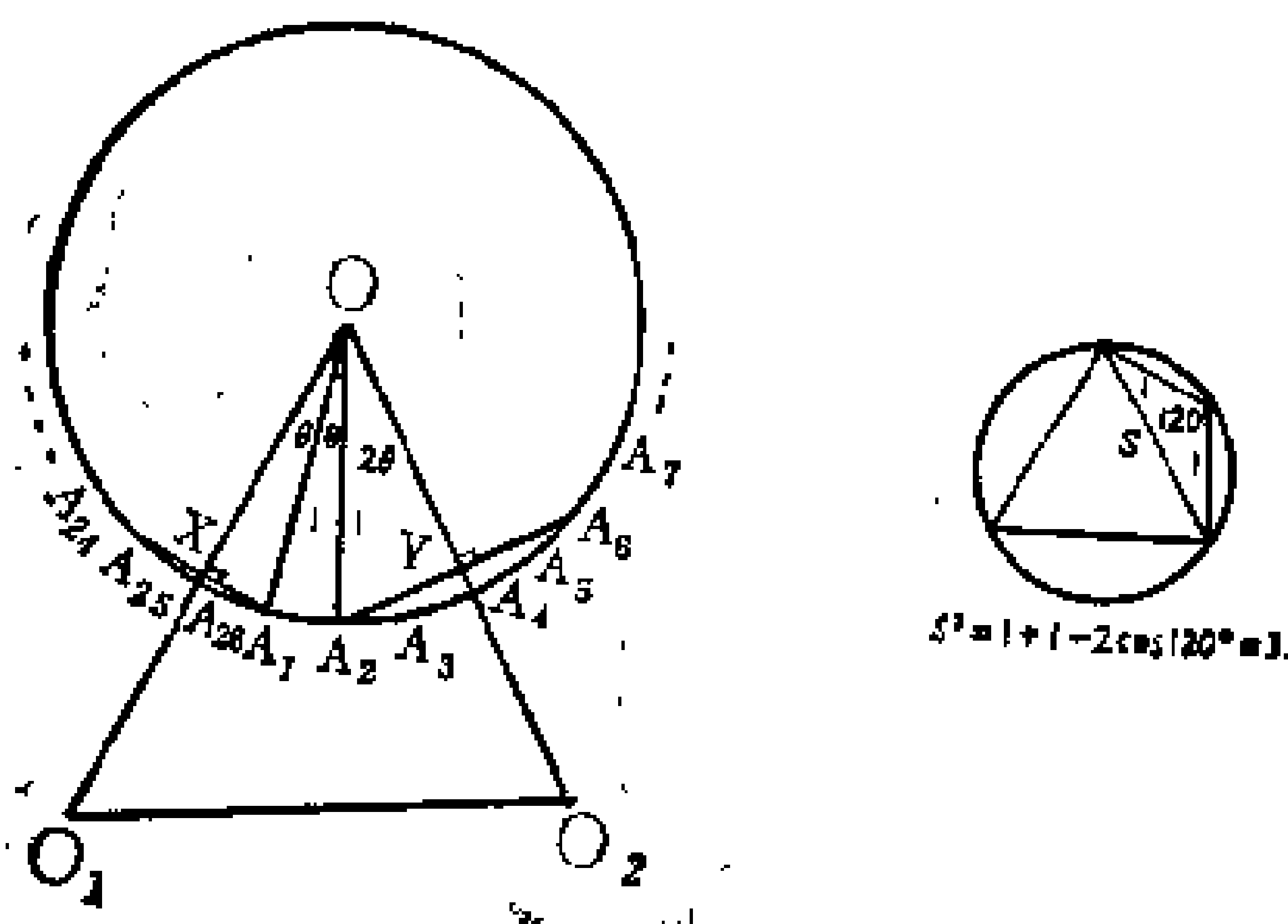


图 87

反射像(对称点)分别为O_1与O_2.试证明这样一条突出的性质：O_1O_2等于圆内接正三角形的边长.

解答 取圆的半径作为长度单位.我们以圆半径作步长，在圆周上得六点画出正六边形，每隔一个顶点相连，得一圆内接正三角形.由余弦定律可知，单位圆内接正三角形一边之长为$\sqrt{3}$.下面我们来证明$O_1O_2=\sqrt{3}$.

OO_1是$A_{25}A_1$的垂直平分线，它要通过A_{26}；同样地OO_2要通过A_4.把正26边形的一条边所对的圆心角表示成θ，则$\theta=2\pi/26=\pi/13$，因而$\angle A_1OA_2=\theta$；若$A_{25}A_1$与A_3A_6的中点分别为X和Y，则有$\angle A_1OX=\theta$，$\angle A_2OY=2\theta$.由于半径A_1O，A_2O为1，所以$OX=\cos\theta$，$OY=\cos2\theta$，其二倍为$OO_1=2\cos\theta$，$OO_2=2\cos2\theta$.

对$\triangle OO_1O_2$用余弦定律得

$$O_1O_2^2=OO_1^2+OO_2^2-2(OO_1)(OO_2)\cos4\theta$$
$$=4\cos^2\theta+4\cos^22\theta-2(2\cos\theta)(2\cos2\theta)(\cos4\theta).$$

下面只用一些尽人皆知的三角公式就够了.由$\cos2x=2\cos^2x-1$推知$4\cos^2x=2+2\cos2x$，于是

$$O_1O_2^2=(2+2\cos2\theta)+(2+2\cos4\theta)-8\cos\theta\cdot\cos2\theta\cdot\cos4\theta$$
$$=4+2\cos2\theta+2\cos4\theta-8\cos\theta\cdot\cos2\theta\cdot\cos4\theta.$$

你看，通乘以$\sin\theta$就有

$$O_1O_2^2\sin\theta=4\sin\theta+2\sin\theta\cdot\cos2\theta+2\sin\theta\cdot\cos4\theta-8\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos2\theta\cdot\cos4\theta.$$

但是

$$8\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos2\theta\cdot\cos4\theta=4\sin2\theta\cdot\cos2\theta\cdot$$

$$\cos 4\theta$$
$$=2\sin 4\theta\cdot\cos 4\theta$$
$$=\sin 8\theta.$$

而对一切自然数n均有

$$2\sin\theta\cdot\cos n\theta=\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta.$$

因而

$$O_1O_2^2\sin\theta=4\sin\theta+(\sin 3\theta-\sin\theta)+(\sin 5\theta-\sin 3\theta)-\sin 8\theta.$$

然而由 $\theta=\pi/13$有 $13\theta=\pi$，也可以表示为 $5\theta+8\theta=\pi$，从而$\sin 5\theta=\sin 8\theta$.所以

$$O_1O_2^2\sin\theta=3\sin\theta,\ O_1O_2=\sqrt{3}.$$

七十四、再谈完全平方数

试证明使

$$x^4+x^3+x^2+x+1$$

是完全平方数的x只有$x=-1, 0, 3$.

解答 这个问题一直拖了七年都未解决，后来贝奈特（Bennett）教授用大家熟知的"配完全平方"的办法巧妙地把这个难题攻克了.

我们来求方程

$$y^2=x^4+x^3+x^2+x+1$$

的整数解，试用x去确定y.我们知道

$$\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4},$$

这正好提供了前两项.$x^2+\frac{x}{2}+1$的值相当接近要求；但是

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2=x^4+x^3+\frac{9}{4}x^2+x+1$$

$$=y^2+\frac{5}{4}x^2,$$

在$x\neq 0$时又大了一点.另一方面，

$$\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=x^4+x^3+\frac{2\sqrt{5}-1}{4}x^2$$

$$+\frac{\sqrt{5}-1}{4}x+\frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

$$=y^2-\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2<y^2,$$

不等式的得出是因为$(5-2\sqrt{5})/4$ 是正数，而$x\neq-(3+\sqrt{5})/2$（无理数）。因此我们得到了两个估计值，一个大了，另一个小了。所以，y 的大小一定是这两个近似值所确定的范围中的某一值：

$$x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}<|y|\leqslant x^2+\frac{x}{2}+1,$$

也就是

$$x^2+\frac{x+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{2}<|y|\leqslant x^2+\frac{x+2}{2}.$$

对于$(\sqrt{5}-1)/2<k\leqslant 2$范围内的某个实数$k$，$y$的大小必定可以精确地由下式得出：

$$|y|=x^2+\frac{x+k}{2}.$$

但是x与y都是整数，所以$(x+k)/2$ 必为整数，从而$x+k$就必须是偶整数．k也就必须是整数．由于$(\sqrt{5}-1)/2$的值在0与1之间，因之k在上述范围内的整数值只有1与2，即$k=1$或2。

$k=2$时，我们有

$$|y|=x^2+\frac{x}{2}+1,$$

由先前已得出的

$$(x^2+\frac{x}{2}+1)^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$$

得到 $y^2=y^2+\frac{5}{4}x^2$，从而得 $x=0$。

$k=1$时，我们有

$$|y|=x^2+\frac{x+1}{2}.$$

然而很容易验证

$$y^2=(x^2+\frac{x+1}{2})^2-\frac{(x-3)(x+1)}{4}.$$

所以在 $k=1$ 时就有

$$y^2=y_2-\frac{(x-3)(x+1)}{4}.$$

这蕴涵 $(x-3)(x+1)=0$，从而 $x=3$或-1。通过常规检验，证实 $x=-1$，0，3 的确使y取整数值，这就是本题要证的结论。

很长时间以来我一直觉得这段推理很不错，的确是颇为引人注目的一项成就，所以当我在南非开普敦地区为高中学生所办的简朴油印刊物“数学文摘”上发现还有一个类似的更加优美的解答时，

真感到惊异和高兴．该刊是开普敦大学约翰·威布(Webb)教授主编的，下面引用的解法登在1973年7月号上．

请注意

$$\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2=x^4+x^3+\frac{x^2}{4}$$

$$=x^4+x^3+x^2+x+1-\left(\frac{3}{4}x^2+x+1\right)$$

$$=y^2-\frac{1}{4}(3x^2+4x+4).$$

因为 $3x^2+4x+4$ 的判别式（即$4^2-4\cdot3\cdot4=-32$）为负，所以对一切实数 x，$3x^2+4x+4$ 都是正的．因此，

$$\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2<y^2,$$

由此得

$$\left|x^2+\frac{x}{2}\right|<|y|.$$

由于 $x^2+x/2=x\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 对一切整数x 都是非负的，所以

$$\left|x^2+\frac{x}{2}\right|=x^2+\frac{x}{2},$$

于是得到

$$x^2+\frac{x}{2}<|y|.$$

如果x是偶数，则 $x^2+\frac{x}{2}$ 就是整数，而更大的整数$|y|$必定比它至少大1．如果x是奇数，则 $x^2+\frac{x}{2}$ 在相邻二整数之间的中部，因而$|y|$比它只可能大$\frac{1}{2}$．无论如何总有

$$|y|\geqslant\left(x^2+\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2},$$

由此得

$$y^2\geqslant x^4+x^3+\frac{5}{4}x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$

$$=x^4+x^3+x^2+x+1+\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

$$=y^2+\frac{1}{4}\left(x^2-2x-3\right).$$

此式蕴涵

$$x^2-2x-3\leqslant 0,$$

$$(x+1)(x-3)\leqslant 0,$$

这就把x的值限制在（-1，0，1，2，3）之中了．直接把这些数进行验算，就能排除 $x=1$，2，真正的解也就得到了．

七十五、奇怪的多项式

若 $P(x)$ 是一个n次多项式，且

$$P(x)=2^x,\quad x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n+1),$$

试求 $P(n+2)$.

解答 由二项式定理知

$2^m=(1+1)^m=C^0{}_m+C^1{}_m+\cdots+C_m{}^n$, $m=1$, 2, $\cdots n+\cdots$.

设n是一个任意确定的自然数. 我们来考虑多项式

$$f(x)=2(C^0{}_{x-1}+C^1{}_{x-1}+\cdots+C^n{}_{x-1}).$$

$f(x)$中次数最高的项是

$$2C^n{}_{x-1}=2\,\frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{n!},$$

这是x的n次式. 所以 $f(x)$是n次式. 但是 $x=1$, 2, $\cdots$, $n+1$ 时我们有

$$f(x)=2\ [(1+1)^{x-1}]\ =2^x$$

(对$m<n$, $C_m{}^n=0$).

这说明 $f(x)$ 与所求的 $P(x)$ 都是n次式，并且对 $x=1$, 2, $\cdots$, $n+1$ 这 $n+1$ 个数值 它们的 值相同. 所以 $f(x)$恒等于 $P(x)$，于是有

$$P(n+2)=2\left(C_{n+1}^{0}+C_{n+1}^{1}+\cdots+C_{n+1}^{n}\right)$$

$$=2\left(2^{n+1}-C_{n+1}^{n+1}\right)=2^{n+2}-2.$$

同样可得

$$P(n+3)=2\left(2^{n+2}-C_{n+2}^{n+1}-C_{n+2}^{n+2}\right)$$

$$=2\left(2^{n+2}-(n+2)-1\right)=2^{n+3}-2n-6.$$

七十六、形心圆

设A，B，C，D是圆周上的四个点，G_A，G_B，G_C，G_D 分别表示三角形BCD，ACD，ABD，ABC的形心(图88)．试证G_A，G_B，G_C，G_D四点共圆．

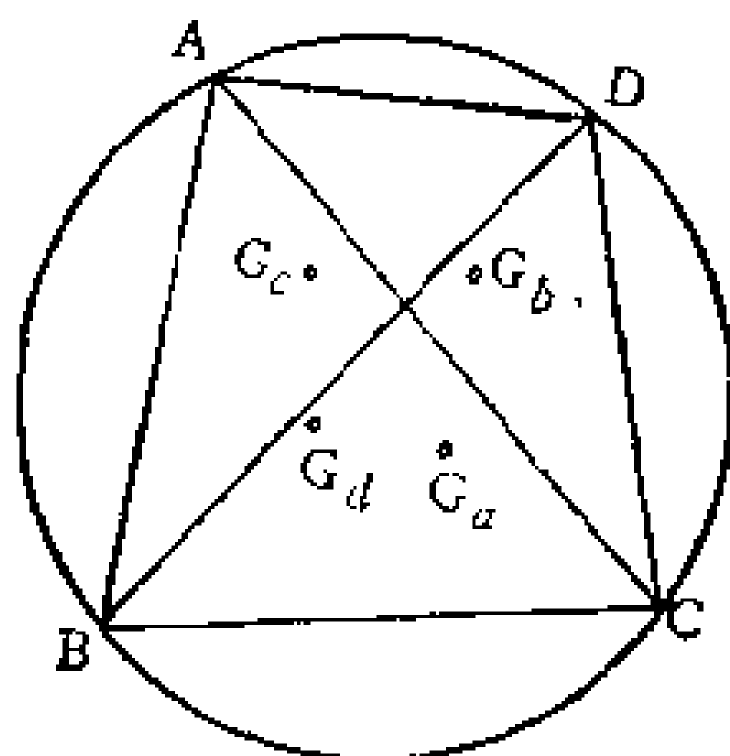


图 88

解答 在A，B，C，D四点上各悬一单位质量，用G表示这个系统的重心．A，B，C处的单位质量等价于G_D处的三单位质量．于是整个系统就等价于G_D处三单位质量与D处的一单位质量，所以G必定在G_DD上，并以1:3 的比例把它分为两段（图89）．

同样，G 也必须在 $G_A A$，$G_B B$，$G_C C$ 上，并按 1∶3 的比例分割各线段．这样一来，膨胀变换 $G(-1/3)$ 就会把 A，B，C，D 分别变为 G_A，G_B，

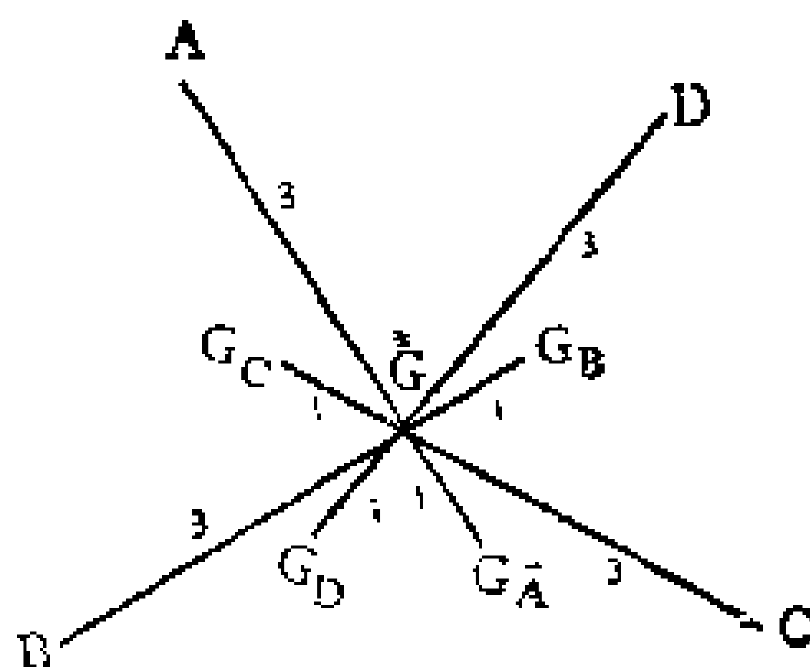


图89

G_C，G_D．但是经过膨胀，圆依然是圆．由于A，B，C，D 共圆，所以G_A，G_B、G_C，G_D也共圆．

对任一多边形的n个顶点，$(n-1)$个顶点的诸集的 n 个形心可以确定一个类似的多边形．又，在三维空间中类似的情况也成立．

从“力学”入手往往可以很顺畅地解决许多相当难解的几何学问题．要证明三角形中各种各样的点，比如形心、内心、格尔龚(Gergonne)点、纳格尔(Nagel)点等的存在，要证明彻伐(Ceva)定理和美纳劳斯(Menelaus)定理这类定理，都是很简单的事情。

下面是罗马尼亚举行的一次初等数学竞赛中的

一道题，我们来解一下看吧：

设A，B，C是一张平面上的定点，A'，B'，C'是另一张平面π上的变动点，AA'，BB'，CC'的中点是L，M，N，试问$\triangle LMN$的形心S的轨迹是什么？

解答：在A，B，C，A'，B'，C'各点处都悬一个单位质量．A与A'处的质量等价于在中点L处的二单位质量．同样我们可以看出整个质量系等价于在L，M，N每处均悬二单位质量．所以$\triangle LMN$的形心S就是整个质量系的重心．

A，B，C处的质量等效于$\triangle ABC$的形心G处置三单位质量；同样，A'，B'，C'处的质量等效于$\triangle A'B'C'$的形心G'处置三单位质量．这样一来重心S必然要平分线段GG'．随着A'，B'，C'在平面π上变动，G'也就遍历π上的一切位置，然而G在其所属的平面上是定点，所以S的轨迹就是平面π经拉伸变换$G(1/2)$所变成的平面．

本节最后一个问题是滑铁卢大学M．克兰姆金(Klamkin)解决的：

试证明：外切于已知球面的绕四边形$ABCD$的切点P，Q，R，S共圆．

解答 从一点到球面的所有切线都是一样长

的．令$AP=AS=a$，$BP=BQ=b$,$CQ=CR=c$，$DR=DS=d$（图90）A，B，C，D处所带质量分别为$\frac{1}{a}$．$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$．A，B两点的质量绕P点的矩是反向相等的，所以它们等效于P处的大小为$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$的质量．同样，$C$，$D$两处的质量也等效于$R$处的某一质量，所以整个质量系的重心$G$必然位于线段$PR$上的某处．同样，$B$，$C$两处的质量合在一起，$A$，$D$两处的质量也合在一起，那末$G$必然在$QS$上．这等于是说$PR$与$QS$必定相交（于$G$）．因此它们确定某张平面$\pi$．显然，切点$P$，$Q$，$R$，$S$属于平面$\pi$与球面所截出的圆．

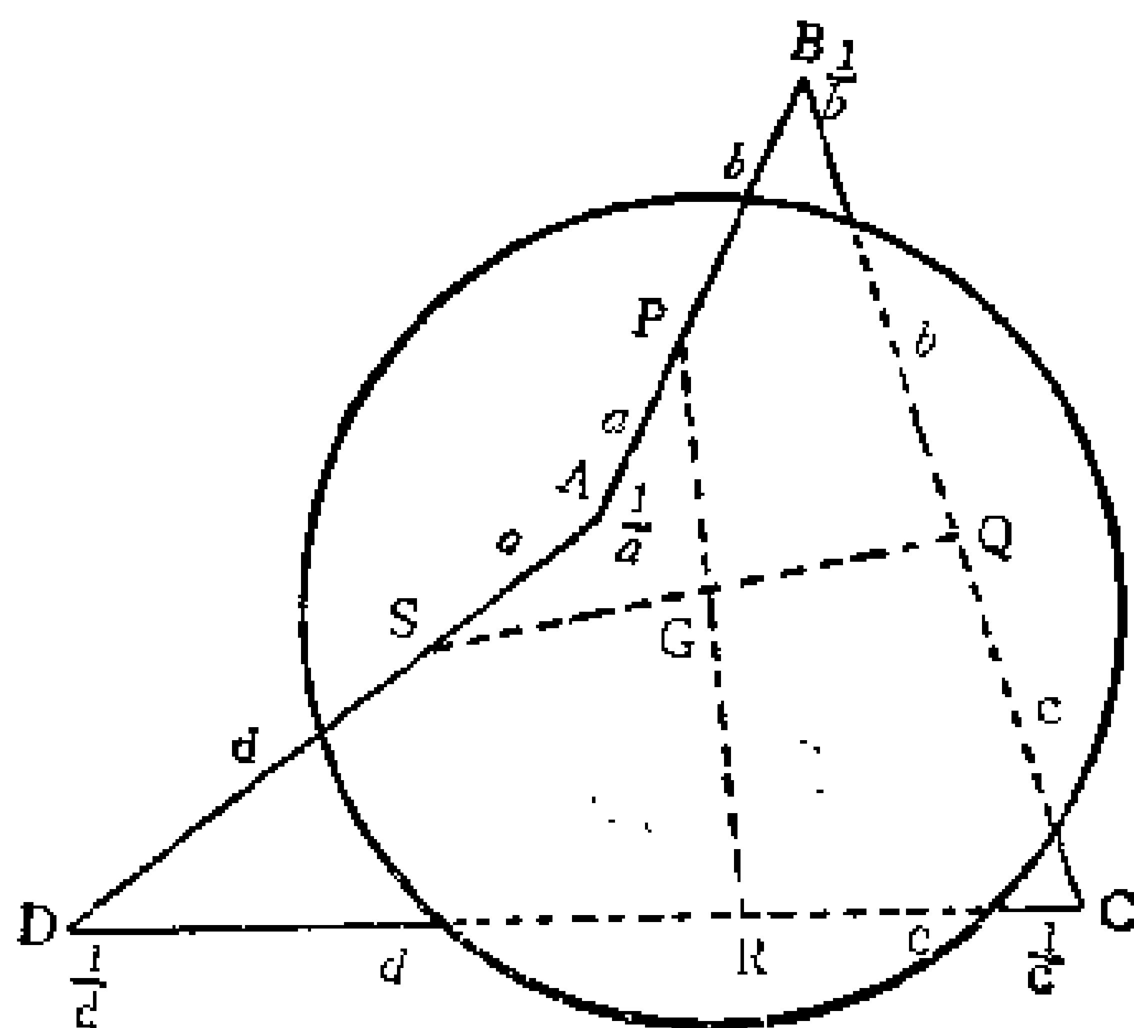


图 90

七十七、容易求出的余式

$x+x^9+x^{25}+x^{49}+x^{81}$ 除以x^3-x，余式若何？

解答 我们有

$$\frac{x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x}{x^3-x}$$

$$=\frac{x^{80}+x^{48}+x^{24}+x^8+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{(x^{80}-1)+(x^{48}-1)+(x^{24}-1)+(x^8-1)+5}{x^2-1}$$

由于x^2-1能除尽$x^{2n}-1$，看来余式应为53．但曾从分子分母中约去过x，所以余式实际上应为$5x$，因为

$$\frac{5}{x^2-1}=\frac{5x}{x^3-x}$$

七十八、3的一个奇特性质

试证明：如果m与n是两个自然数，那么$\sqrt[n]{m}$与$\sqrt[m]{n}$之一永远小于或等于$\sqrt[3]{3}$.

解答 设$m=n$，我们想证明的是$\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}$，即$n^{\frac{1}{n}}\leqslant 3^{\frac{1}{3}}$，也就是说想证$n^3\leqslant 3^n$. 我们马上会看出这一关是很容易用归纳法证明的.显然，对$n=1$, 2，3我们的论断是真的，今设

$$n^3\leqslant 3^n$$

对$n\geqslant 3$成立，于是

$$3^{n+1}=3\cdot 3^n\geqslant 3n^3=n^3+3n^2+3n+(n-3)n^2+(n^2-3)n>n^3+3n^2+3n+1$$
$$=(n+1)^3$$

因此，对$m=n$论断是成立的.

这似乎只是一个特例，一般情形是$m\neq n$. 然而，事实恰恰相反. 因为，如果$m<n$，则

$$\sqrt[n]{m}<\sqrt[n]{n}\leqslant\sqrt[3]{3}.$$

我们看得出，只有$m=n=3$时等号才成立.

七十九、正方形内的一个正方形

如图91所示，从正方形的顶点向边的中点划直线．试证明这样得到的小正方形的面积是大正方形的1/5．

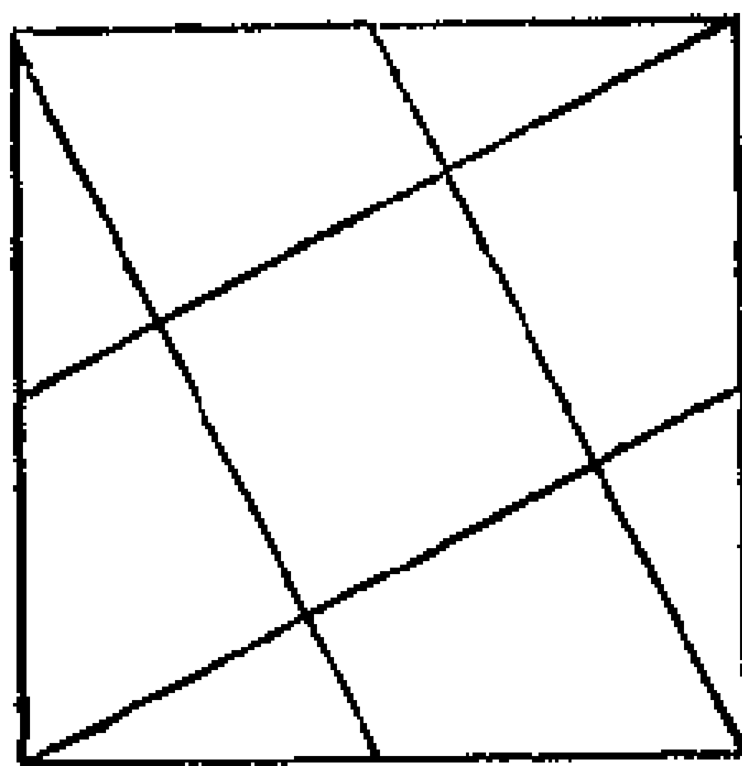


图91

解答 如图92所示的五个相等正方形组成的"十字形"中，直线AD显然交PQ于其中点X，因而三角形APX与XQD全等．所以我们可以把$\triangle APX$切下，放到$\triangle XQD$位置上去．在A，B，C，D各点都这样作，不难看出会到得一个正方形．

然而面积不因此而有任何变化，所以中央小正方形占有总面积的1/5．

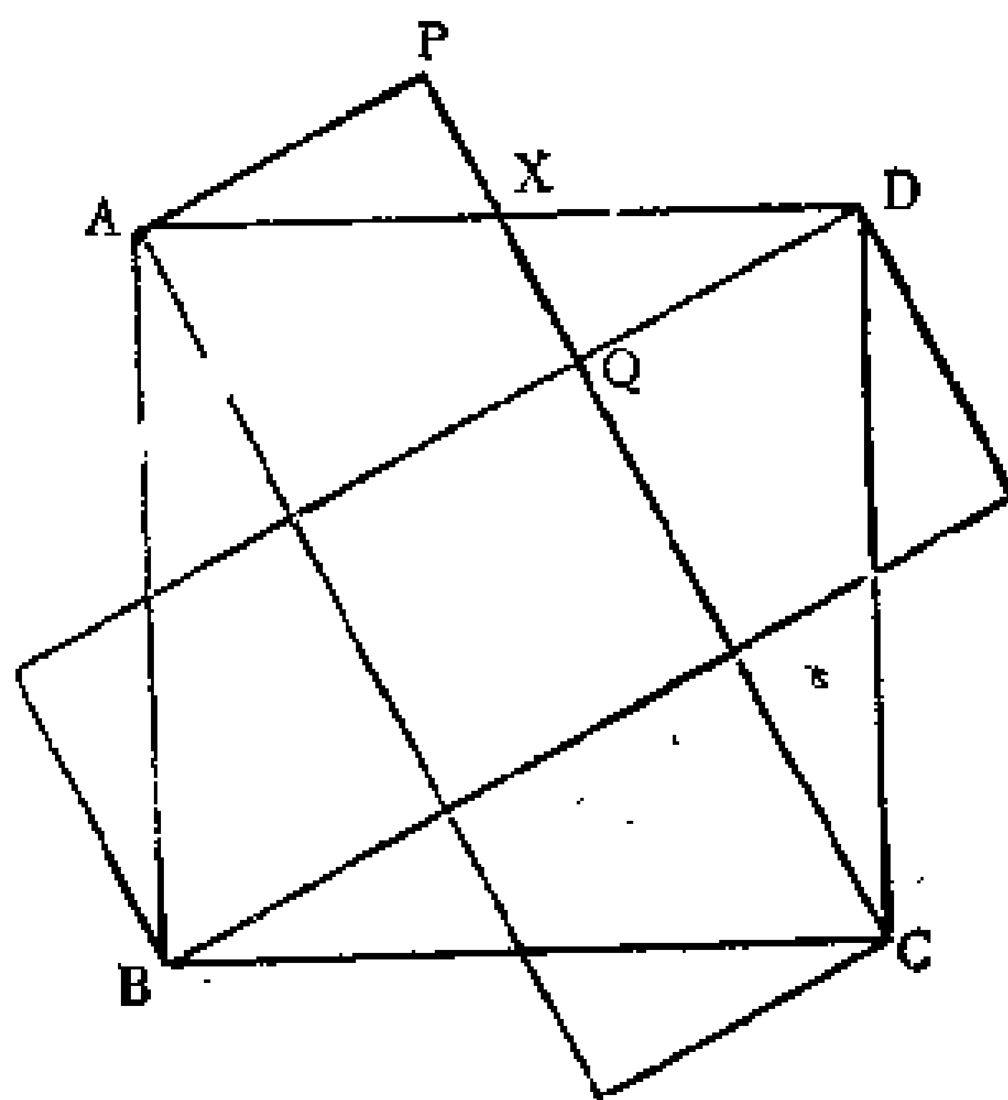


图92

八十、永远是平方

写出偶数个1构成一个数A，写出个数少一半的4构成数B．试证$A+B+1$永远是个完全平方数．

解答　设A有$2m$位，B有m位，于是

$$\left(\frac{3B}{4}\right)^2=\Big[\frac{3}{4}\underbrace{44\cdots4}_{m})\Big]^2=(\underbrace{33\cdots3}_{m})(\underbrace{33\cdots3}_{m})$$

$$=(\underbrace{11\cdots1}_{m})(\underbrace{99\cdots9}_{m})=(\underbrace{11\cdots1}_{m})(10^m-1)$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{m}\ \underbrace{00\cdots0}_{m}-\underbrace{11\cdots1}_{m}.$$

加上$\frac{1}{2}B$，就是$\underbrace{22\cdots2}_{m}=2(\underbrace{11\cdots1}_{m})$，我们得到$\left(\frac{3}{4}B\right)^2$

$$+\frac{1}{2}B=\underbrace{11\cdots1}_{m}\ \underbrace{00\cdots0}_{m}+\underbrace{11\cdots1}_{m}=\underbrace{11\cdots1}_{2m}=A.$$

因此

$$A+B+1=\Big[\left(\frac{3}{4}B\right)^2+\frac{1}{2}B\Big]+B+1$$
$$=\left(\frac{3}{4}B\right)^2+\frac{3}{2}B+1$$

$$=\left(\frac{3}{4}B+1\right)^2$$

$$=(\underbrace{33\cdots34}_{n个})^2$$

八十一、将自然数分组

设自然数分组如下：

(1)，(2，3)，(4，5，6)，(7，8，9，10)，(11，12，13，14，15)，…，并将第偶数组划掉．试证明留下的前k组之和为k^4．例如在$k=3$时，就有

$$1+(4+5+6)+(11+12+13+14+15)=81=3^4.$$

解答　第n组之前有$n-1$组，它们包含了前

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

个数，所以第n组的第一个数是$\frac{(n-1)n}{2}+1$．同样可知，第n组的最后一个数是$\frac{n(n+1)}{2}$．因此第n组中的数的和$S(n)$为

$$S(n)=\frac{n}{2}\left[\frac{(n-1)n}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

划去一些组后剩下的第k组，实际上在原来顺序中是

第$2k-1$组．所以我们想要证明的就是

$$S(1)+S(3)+\cdots+S(2k-1)=k^4$$

我们利用数学归纳法来证，并注意$S(1)=1$．

如果 $S(1)+S(3)+\cdots+S(2k-1)=k^4$，则

$$S(1)+S(3)+\cdots+S(2k+1)=k^4+S(2k+1)$$

$$=k^4+\frac{(2k+1)\,[(2k+1)^2+1]}{2},$$

右端最终可化为$(k+1)^4$．

八十二、边长成算术级数的三角形

试证明：如果三角形三边之长构成算术级数，那末联结形心和内心的直线与一条边平行.

解答 设三角形ABC三边的关系是$c<b<a$（a为与顶点A相对的边，余类推）. 于是，因三边构成算术级数，故有$a+c=2b$.

用I表示内心，r表示内半径（图93），则面积为

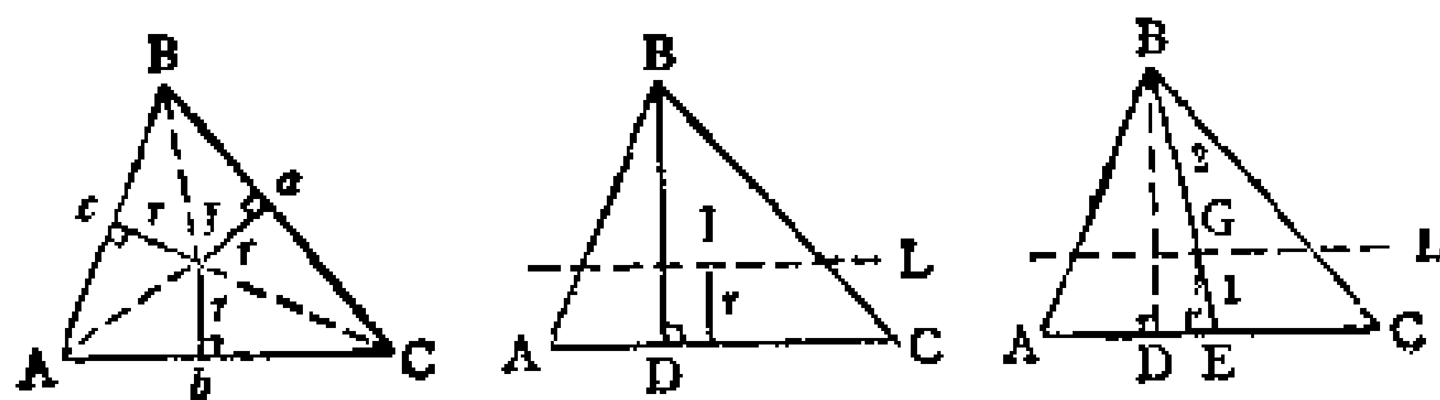


图93

$$\triangle ABC=\triangle IAC+\triangle IBC+\triangle IAB$$
$$=\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}cr$$
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c).$$

但$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}BD\cdot b$，其中BD是从B引出的高. 因而$\frac{1}{2}BD\cdot b=\frac{1}{2}r(a+b+c)$，于是得

$$\frac{r}{BD}=\frac{b}{a+b+c}=\frac{b}{3b}=\frac{1}{3}.$$

这说明I在与AC平行且位于从AC到B的三分之一处的一条直线L上．但是形心G按2∶1的比例分割中线BE(由于是相似三角形)，G因而也在L上．所以GI确定L，这是一条与边AC平行的直线．

八十三、通过排列得出的分数

$a_1, a_2, \cdots, a_n$是些正实数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$是它们的任意重排的结果．试证明

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

解答 因为n个正数的算术平均至少等于其几何平均，所以

$$\frac{1}{n}\left[\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right]$$

$$\geqslant\left[\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_n}{b_n}\right]^{\frac{1}{n}}=1,$$

由此立即得证结论．

八十四、关于二项式系数

$$C_{2n}^{1},\quad C_{2n}^{3},\quad C_{2n}^{5},\quad \cdots,\quad C_{2n}^{2n-1}$$

的最大公约数g等于多少?

解答 一组数的任意一个公约数总能除尽这组数的和．本题的关键是要注意下式：

$$C_{2n}^{1}+C_{2n}^{3}+\cdots+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}.$$

上式可推导如下．根据二项式定理，我们有

$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^{2}+\cdots+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

$x=1$时全部系数之和是 2^{2n}．$x=-1$时，r为奇数的系数 C_{2n}^{r}之和等于r为偶数的系数 C_{2n}^{r} 之和．因此已知数组的和是总和数的一半，即 2^{2n-1}．所以所求的最大公约数g必须整除 2^{2n-1}，因而必须是2的乘方．

假设2^{k}是整除n的2的最大乘方，则$n=2^{k}q$，这里 q是奇数，于是有$C_{2n}^{1}=2n=2^{k+1}q$．因为 g 整除

C^1_{2n}且为2的乘方，所以它不得大于2^{k+1}，我们要证明$g=2^{k+1}$，办法就是证明2^{k+1}的确能除尽系数C^r_{2n}，$r=1, 3, 5, \cdots, 2n-1$。

注意观察

$$
\begin{aligned}
C^r_{2n} &= \frac{(2n)!}{(2n-r)!\ r!} \\
&= \frac{2n}{r}\left[\frac{(2n-1)!}{(2n-r)!(r-1)!}\right] \\
&= \frac{2n}{r} C^{r-1}_{2n-1} \\
&= \frac{2^{k+1}q}{r} C^{r-1}_{2n-1}.
\end{aligned}
$$

因为r是奇数，C^r_{2n}是整数，所以在化简的时候，分子中的2^{k+1}一定不会被约掉，于是结论也就得到了。

八十五、费马数 F_{73}

$F_n=2^{(2^n)}+1$，$n=0$，1，2，…，这样的数叫费马数，这是为了纪念法国数学家皮埃尔·德·费马（1601—1665）而取的名字．前五个费马数是

3，5，17，257，65537，4294967297．

你完全可以想象 $F_{73}=2^{(2^{73})}+1$ 写出来会有多么的长．这就提出一个问题：把巨数 F_{73} 用普通的十进制记数法记录，世界上所有图书馆的全部书是否够用．为了回答这个问题，我们可以利用对书和图书馆作的最粗略的估算：

一百万个图书馆，每馆藏书一百万册，每册书有1000页，每页上印100行，每行容纳100个数字．

问题的第二部分是记录 F_{73} 时最末 3 个数字是什么？

解答　1.有了题中给出的粗略数据，我们可以得出全世界图书馆的总容量为

$(100)(100)(1000)(1000000)(1000000)=10^{19}$

个数字．数字个数是个很大的数目．我们的问题显

然是要知道 F_{73}的数字的个数．因为

$$2^{10}=1024>10^3,$$

我们有

$$2^{73}=8\cdot 2^{70}>8\cdot 10^{21},$$

$$2^{(2^{73})}>2^{8\cdot 10^{21}}=(2^{80})^{10^{20}}=\left[(2^{10})^8\right]^{10^{20}}$$

$$>10^{24\cdot 10^{20}}.$$

所以F_{73}包含的数字个数不止 $24\cdot 10^{20}=240(10^{19})$个．要把 F_{73}记录下来就要求有 240个题中所说的图书馆系统．

2.要求出F_{73}的最末3个数字，我们将不加证明地引用下面两个著名的发现：

(i)任一自然数的平方与其22次方，末二位数永远相同：

$$n^{22}\equiv n^2(\mathrm{mod}100);$$

(ii)任一自然数的立方与其103次方，末3位数字总是相同的：

$$n^{103}\equiv n^3(\mathrm{mod}1000).$$

对于非负的k，性质(i)意味着(mod100)

$$n^{k+22}=n^k\cdot n^{22}\equiv n^k\cdot n^2=n^{k+2}.$$

所以可以从≥22的指数中减去20而不会改变乘方的余数(mod100)．重复应用此理，只要最终的指数≥2就总可以把20的倍数约去．同样，性质(ii)也允许(mod1000)去掉100的倍数而把指数化小，只要

最终的指数≥3就行.

这样一来我们便有

$$2^{73}\equiv 2^{60+13}\equiv 2^{13}(\bmod 100).$$

于是(mod 100)

$$2^{73}\equiv 2^{13}=2^{3}\cdot 2^{10}=8(1024)\equiv 8(24)=192\equiv 92.$$

因而对某一整数q有

$$2^{73}=100q+92.$$

用性质(ii)，我们得

$$2^{(2^{73})}\equiv 2^{100q+92}\equiv 2q^{2}(\bmod 1000)$$

只消作简单的算术演算就可得到 $2^{92}\equiv 896$ (mod 1000).

因此

$$F_{73}=2^{(2^{73})}+1\text{的末尾是}897.$$

圣•热尔曼(Germain)和斯丁(Steen)为此目的编过一个计算机程序，他们算出F_{73}的最末40位是

8947301518995672165296243935786246864897.

现代算术的最著名的成就之一是确定了大得无比的

$$F_{1945}=2^{(2^{1945})}+1$$

是复合数．在这巨大无比的数面前，F_{73}就显得微

乎其微了．但是若用上面的办法，确定F_{1945}的末3位数字甚至比确定F_{73}的末3位数字还要容易些．读者试证一下F_{1945}的末3位数字是 297，也许会觉得其乐无穷．

3．本节最后想介绍求F_{73}的末 3 位数字的另一个满不错的方法．

显然

$$2^{10}=1024=25t-1（对t=41）\equiv -1 \pmod{25}$$

应用二项式定理有

$$2^{100}=(2^{10})^{10}=(25t-1)^{10}$$
$$=(25t)^{10}-10\cdot(25t)^{9}+\cdots-10\cdot(25t)$$
$$+1.$$

除了最后一项外，二项展式中的每一项都能被125所整除，所以

$$2^{100}\equiv 1 \pmod{125}.$$

但

$$2^{73}=(2^{10})^{7}\cdot 2^{3}\equiv(-1)^{7}\cdot 2^{3} \pmod{25}$$
$$\equiv -8 \pmod{25},$$

由此得知对某整数k有$2^{73}=25k-8$．又显然$4\mid 2^{73}$，因此

$$2^{73}\equiv 0\equiv -8 \pmod{4},$$

$$2^{73}=4r-8,$$

式中r为某一整数．于是

$25k-8=4r-8$，$25k=4r$，这蕴涵 $4|k$。令 $k=4k_1$，得

$$2^{73}=100k_1-8\equiv-8\equiv92 \pmod{100},$$

从而对某一整数 q 有

$$2^{73}=100q+92.$$

因此

$$2^{(2^{73})}=2^{100q+92}=2^{92}(2^{100})^q\equiv2^{92}(1)^q \pmod{125},$$

即

$$2^{(2^{73})}\equiv2^{92} \pmod{125}.$$

令 $2^{92}\equiv x \pmod{125}$，则

$$2^8x=2^{100}\equiv1 \pmod{125},$$

于是有

$$2^8x=256x\equiv6x \pmod{125},\ 6x\equiv1 \pmod{125}.$$

由此得

$$6x\equiv126 \pmod{125},\ x\equiv21\equiv-104 \pmod{125}.$$

所以

$$2^{(2^{73})}\equiv x\equiv-104 \pmod{125}.$$

然而显然有 $8|2^{(2^{73})}$ 这意味着

$$2^{(2^{73})}\equiv0\equiv-104 \pmod{8}.$$

因此

$$2^{(2^{73})}\equiv 125s-104=8w-104,$$

由此推知，$8\mid s$，$1000\mid 125s$，

$$2^{(2^{73})}=1000v-104\equiv -104 \pmod{1000}\equiv 896$$

(mod 1000)。所以F_{73}的最末3位数是897。

八十六、圆内接四边形

圆内接四边形$ABCD$两组对边延长后分别交于P与Q(图94)．试证角P与角Q的分角线在$ABCD$上所确定的四边形$EFGH$恒为菱形．

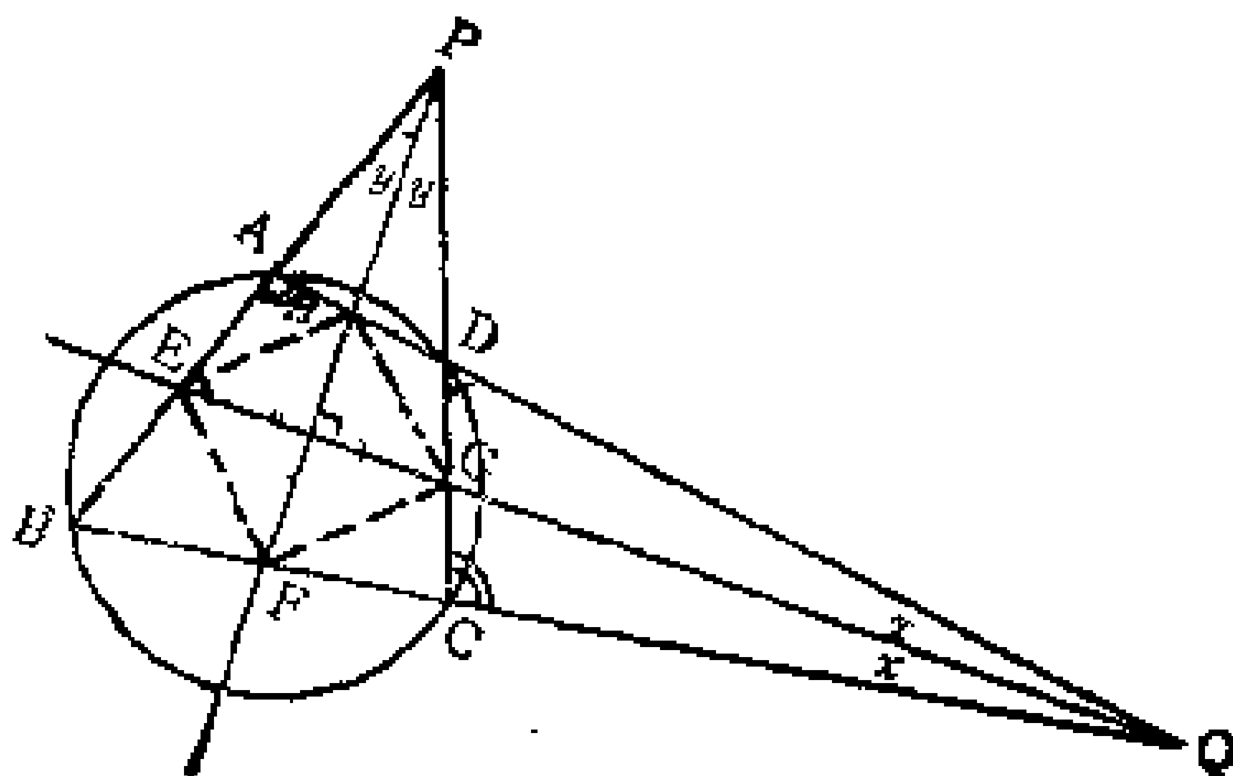


图 94

解答 因为$ABCD$内接于圆，所以外角DCQ等于内对角A．由于DE平分$\angle Q$，故$\triangle AQE$的角等于$\triangle CQG$的角．因此

$$\angle CGQ = \angle AEQ.$$

但 $\angle CGQ = \angle PGE$(对顶角)．

因而

$\angle PEG = \angle PGE$，故$\triangle PEG$是等腰三角形．

所以$\angle P$的分角线是底边EG的中垂线．H和F因在中垂线上，故与E、G两点等距；同理，E和G也与H，F等距，所以$EFGH$是菱形．

八十七、自然数的特别三数组

找出两两互素的不同的三个自然数 x，y，z 所组成的三数组，使得数组中任意两个数的和能被第三个数整除．

解答 设这样的一个三数组的三个数是 x，y，z，并且 $x<y<z$．于是

$x+y<z+z=2z$，

即是说 z 除和数 $x+y$ 商2都办不到，因此只能商1，从而有 $x+y=z$．

这样便有 $x+z=2x+y$，由于左边的和能被 y 整除，所以 $2x$ 能被 y 整除．然而 $2x<2y$ 也表示 $2x$ 连 y 的二倍都达不到，所以 $2x$ 只能等于 y，于是有

$$x=x，\quad y=2x，\quad z=x+y=3x．$$

因为这些是两两互素的，所以 x 必为1，从而得到唯一的答案(1，2，3)．

八十八、一些素数的和

令S_n表示前n个素数的和：

$$S_n=2+3+5+\cdots+p_n.$$

试证明在S_n与S_{n+1}之间一定有一个完全平方数.

解答 $n=1, 2, 3, 4$时结论容易验证. 今考虑$n\geqslant5$. 设两个正实数x，$y(x<y)$的平方根跨整数m的两侧，则完全平方m^2必在x与y之间，即：

若$\sqrt{x}<m<\sqrt{y}$，则$x<m^2<y$.

如果$\sqrt{y}-\sqrt{x}>1$，则$\sqrt{x}$与$\sqrt{y}$之间的区间必定很宽，不可避免地会包含一个整数，无论这整数可能出现在数轴上的何处. 这等于是说

$$\sqrt{y}>1+\sqrt{x},$$

$$y>1+2\sqrt{x}+x,$$

$$y-x>1+2\sqrt{x}.$$

下面我们证明：对任意的n，恒有

$$S_{n+1}-S_n>1+2\sqrt{S_n},$$

从而得到题中的结论.

我们曾令

$$S_n=2+3+5+7+11+\cdots+p_n.$$

$n\geqslant5$时，S_n 至少包含了 $2+3+5+7+11$，这里面缺39这个数，如果我们不要2，但要把所缺的奇数都囊括进来，我们至少要多得$1+9-2=8$，所以，

$$S_n<1+3+5+\cdots+p_n,$$

右边是从1至p_n的全部奇数之和。

从1到$2k-1$的全部奇数之和为

$$1+3+\cdots+(2k-1)=\frac{k}{2}[1+(2k-1)]=k^2.$$

$p_n=2k-1$时，$k=\frac{1}{2}(1+p_n)$。所以从1到 p_n 的全部奇数之和为$\frac{1}{4}(1+p_n)^2$。这样一来

$$S_n<\frac{1}{4}(1+p_n)^2,$$

因而

$$\sqrt{S_n}<\frac{1}{2}(1+p_n),$$

换言之

$$2\sqrt{S_n}<(1+p_n).$$

注意，p_{n+1}至少必须是p_n+2（因为p_n与p_{n+1}不相邻），所以

$$S_{n+1}-S_n=p_{n+1}$$

$$\geqslant p_n+2$$

$$=1+(1+p_0)$$

$$>1+2\sqrt{S_0},$$

这就是我们想要证明的。

八十九、又一个古怪的数列

这个问题讲的是产生一个自然数数列的古怪办法．比如我们就从2520开始吧，我们有

2520，25，11，12，8，7，8，…，

数列中各项是这样确定的：把1加到前一项的素因子的和上去，每个素因子在和中出现的次数就是该素因子在素数分解式中的方次数．我们有

$$2520=1\cdot2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7,$$

所以确定出下一项是

$$1+3\cdot2+2\cdot3+5+7=25;$$

而$25=1\cdot5^2$又确定了再下一项是$1+2\cdot5=11$，以此类推．

若n的素数分解为$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，则$n$后那一项〔表示成$f(n)$〕就是$f(n)=1+a_1p_1+a_2p_2+\cdots+a_kp_k$．

由于$f(7)=8$，$f(8)=7$，所以一旦出现了8或7，就会有8，7，8，7…这种无休止的摆动出现．我们的问题就是要证明首项$\geqslant6$的自然数数列一定会包含8或7，因而从某项起就必然出现8，7，8，7…

这样的摆动：

解答 在阐述本问题所用的例子中，自然数数列从2520才一步就降到了25这么小，再下一步就降到了更小的数11．我们不免会认为$f(n)$永远小于n．然而12却紧随11，这表明并非如此．其实p为素数时$f(p)=p+1$．不过我们认为一般来讲$f(n)$小于n还是正确的．我们将看到这种数列只有在素数项之后才上升，而且只增加1，而在其余的时候(但除开$n=8$)，数列每一步至少也要减少2：

n为复合数时，$f(n)\leqslant n-2$，但$n=8$除外(对$n=8$，只减少1)．从这一结论很快就能推出我们想得的结果．

在推理过程中的某个时候我们必须证明，当$n>6$时，总有$f(n)>6$．检查几个简单情况即可得出这一结论．

(i)若n有大至7这么大的素因子，那末$f(n)$由于应比n的任意素因子大也就大于6．所以我们只需考虑其素因子为2，3，5的数：

$$n=2^a\cdot3^b\cdot5^c.$$

(ii) 若$c\geqslant2$，则$f(n)\geqslant1+2\cdot5>6$．

若$c=1$，那末，要想$n>6$，a，b之中至少应有一个不是零，于是$f(n)\geqslant1+5+2>6$．这样就剩下形式如下的数了：

$n=2^a\cdot3^b$，对应于$c=0$。

(iii)若$b\geqslant2$，则$f(n)\geqslant1+2\cdot3>6$．若$b=1$，那末要想$n>6$，必有$a\geqslant2$，于是$f(n)\geqslant1+2\cdot2+3>6$．这样一来只需考虑形如$n=2^a$的数了：

(iv) 要$n>6$，必须$a\geqslant3$，于是$f(n)\geqslant1+3\cdot2>6$．

讲到这里，我们便可以明白整个推论过程是怎么回事了．$n>6$时，$f(n)$也大于6．大于6的素数p是奇数，因而$f(p)=p+1$为偶数，亦即复合数．数列中相邻二项必然呈下列三种类型（不会有素数项后仍为素数项的情形）：

…，素数，复合数，…

…，复合数，素数，…

…，复合数，复合数，…

若相邻二项中任一项是8，那就要开始摇摆振动了，此时数列正合乎我们的要求．因为对于不是8的复合数n，$f(n)$至少要减小2，所以我们从三种类型看出，每走两步净减量至少是1．例如：

…，复合数，素数，…

至少失去2　得到1

净失至少为1

因此数列的交错项又给出一个子数列，在子数列中

只要不出现8，它就是严格递减的数列．然而一切项都>6，因此终究是会减小到底的．这就意味着到达数目7，于是数列中出现振动．唯一避免的办法就是让等于例外值8的项出现，使得在一对相邻项上至少净减1的事情不要出现，然而8的出现也要引起振动，这样一来证明就完备了．剩下还要做的事是证明下述基本性质：

当n为复合数，且$n>6$，$n\neq 8$时，$f(n)\leqslant n-2$，即对复

合数$n\geqslant 9$，$f(n)\leqslant n-2$．

我们应用数学归纳法证明．因为$f(9)=7$；所以对于数9要证的性质是成立的．今令n表示大于9的复合自然数，并把归纳假设叙述为：该性质对一切小于n但也$\geqslant 9$的复合自然数是成立的．我们证明对数n本身这性质也成立．

由于n是复合数，它至少有一个非平凡的因子分解

$$n=k_1k_2,\ \text{式中}1<k_1\leqslant k_2<n.$$

若k_i中任一个都是素数，则$f(k_i)=k_i+1$．若k_i是复合数且至少等于9，则它就在归纳假设的范围内，因而$f(k_i)\leqslant k_i-2$．除此而外，k_i就是4，6，8中之一，$f(k_i)$就分别等于5，6或7．无论属于哪种情形，$f(k_i)$都绝不会大于k_i+1，即

$$f(k_1)\leqslant k_1+1,\ f(k_2)\leqslant k_2+1.$$

假设

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}.$$

因子分解式 $n=k_1k_2$ 可以通过把n的素因子分成两个非空组而得到：

$$n=\underbrace{(p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_k^{b_k})}_{k_1}\underbrace{(p_1^{a_1-b_1}p_2^{a_2-b_2}\cdots p_k^{a_k-b_k})}_{k_2}.$$

一般地我们有

$f(t)=1+$(t的素因子出现适当多次数而得的和)．据此，k_1的素因子重复适当次后得出的和数是 $f(k_1)-1$．同样对 k_2 与n我们也有 $f(k_2)-1$，$f(n)-1$．然而因为$n=k_1k_2$，故得

(n的素因子适当重复后相加之和)

$=$(k_1的素因子适当重复后相加之和)

$+$(k_2的素因子适当重复后相加之和)．

于是得到

$$f(n)-1=f(k_1)-1+f(k_2)-1,$$

$$f(n)=f(k_1)+f(k_2)-1.$$

因为$f(k_1)\leqslant k_1+1$，$f(k_2)\leqslant k_2+1$，所以

$$f(n)\leqslant k_1+1+k_2+1-1,$$

$$\boxed{f(n)\leqslant k_1+k_2+1.}$$

然而我们知道k_1和k_2都至少等于2，它们的积至少等于9．所以我们极易推知乘积

$$(k_1-1)(k_2-1)$$

至少等于4：

(i)若k_1，k_2有一个取最小值2，使得$k_i-1=1$，那末，由于$n=k_1k_2\geqslant 9$，另一个$k_i\geqslant 5$．此时

$$(k_1-1)(k_2-1)\geqslant 1\cdot 4=4.$$

(ii)若都不取最小值，即$k_i\geqslant 3$，则$k_i-1\geqslant 2$，其积$\geqslant 4$．

证明的最后一步要用到一个巧妙的关系，即k_1+k_2+1与$(k_1-1)(k_2-1)$的关系．我们有

$$(k_1-1)(k_2-1)=k_1k_2-k_1-k_2+1$$
$$=k_1k_2-(k_1+k_2+1)+2.$$

因此

$$k_1+k_2+1=k_1k_2+2-(k_1-1)(k_2-1)$$
$$=n+2-(k_1-1)(k_2-1).$$

根据前面的不等式，我们有

$$f(n)\leqslant k_1+k_2+1$$
$$=n+2-(k_1-1)(k_2-1).$$

由于$(k_1-1)(k_2-1)\geqslant 4$，我们得

$$f(n)\leqslant n+2-4,$$

亦即

$$f(n)\leqslant n-2.$$

九十、椭圆与格子

把半径为5的圆放到一个（单位方）格上去，无论如何放法它都必然会覆盖住某个格点，因为它大了一点．（我们把提到的图形都当成是包含边界的，换句话说是闭的．）当然啰，如果圆很小，那就会一个格点也盖不住．由于平面的每个点距离格点至多为$\sqrt{2}/2$．（$\sqrt{2}/2$是格子的基本单位方格的对角线的一半），所以半径$\geqslant\sqrt{2}/2$的圆的圆心无论落在什么地方，这圆至少要盖住一个格点．更困难的问题是证明：随机地将$a\times b$的矩形放到格子上，它至少盖住一个格点的充要条件是$a\geqslant 1$，$b\geqslant\sqrt{2}$．还有一个复杂的问题是，证明三角形一定可以至少覆盖一个格点的充要条件是其面积$\geqslant c^2/2(c-1)$，这里c是它的最长边的长度．然而最有趣的问题还是要算椭圆覆盖格点的问题了．

椭圆的形状虽说千差万别．然而椭圆永远覆盖一个格点的情况不过是，放在标准位置上（即中心放在原点，长短轴分别放在坐标轴上）时，它一定覆盖点（1/2，1/2）．试证此定理．

解答 令已知椭圆的方程是 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$。它遮住点(1/2, 1/2)的条件是

$\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}a^2\leqslant a^2b^2$，或者$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$。

定理所说的就是，椭圆至少遮住一个格点的充要条件为

$$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2.$$

(a)充分性：

设$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$。我们考虑由u、v轴确定的

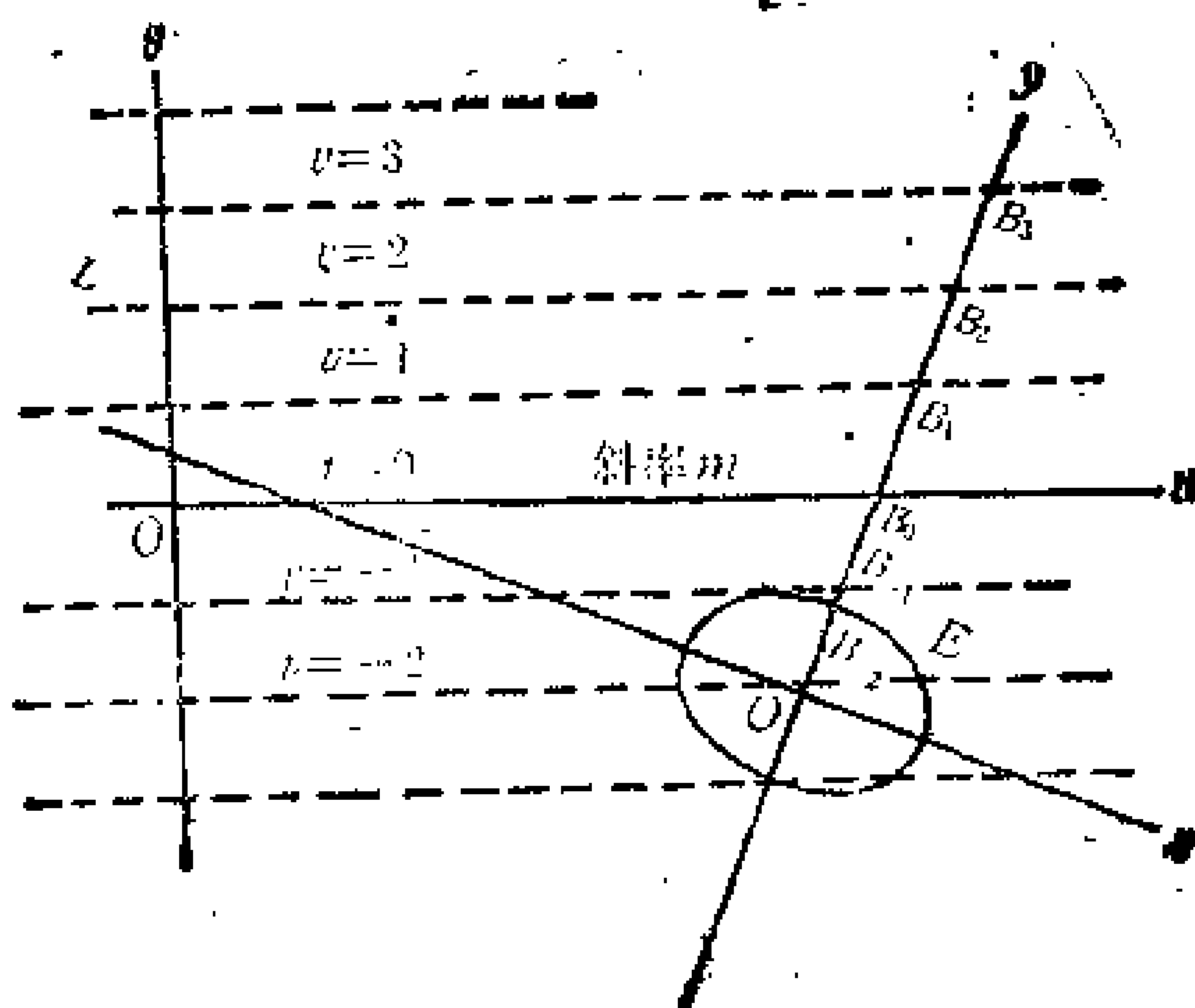


图95

点(u, v)构成的一个（单位正方）格子L．将椭圆E放到L上，任其落在何处（图95）．我们想把E的轴作为坐标轴，使用解析方法．关于参考架xy，E就处于标准位置，其方程为$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$．L的格子线可以以任何角度出现在我们的xy平面上．由于相互垂直的轴u和v指向四面八方，必有一条轴具有斜率m（相对于xy系），m的取值范围为$-1<m\leqslant1$．今设u轴的斜率为m．L的格子线$v=n$（整数）组成xy系中一组斜率为m的等距平行线，并与y轴相交于一组等距离点B_n．我们要作的第一件事就是求y轴上相邻二交点间的距离B_nB_{n+1}．

在过原点O，斜率为m的直线T上取一点P，令其横坐标为1（图96）．令P的纵标为PN．由于斜率$m=PN/ON$，故$PN=m$，$OP=\sqrt{1+m^2}$．作垂线$B_{n+1}S$垂直于$v=n$．由于同位角$B_{n+1}B_nS$与B_nOP相等，所以它们的余角$SB_{n+1}B_n$与PON相等．因此两三角形$B_{n+1}B_nS$和PON全等（$B_{n+1}S=ON=1$），于是得到所求的

$$B_{n+1}B_n=OP=\sqrt{1+m^2}.$$

诸点B_n以步距$\sqrt{1+m^2}$沿y轴分布，因之必有一点$B_n=(0,y)$出现，其y值满足$-\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}<y\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}$，这是将某一步的两端对称地摆

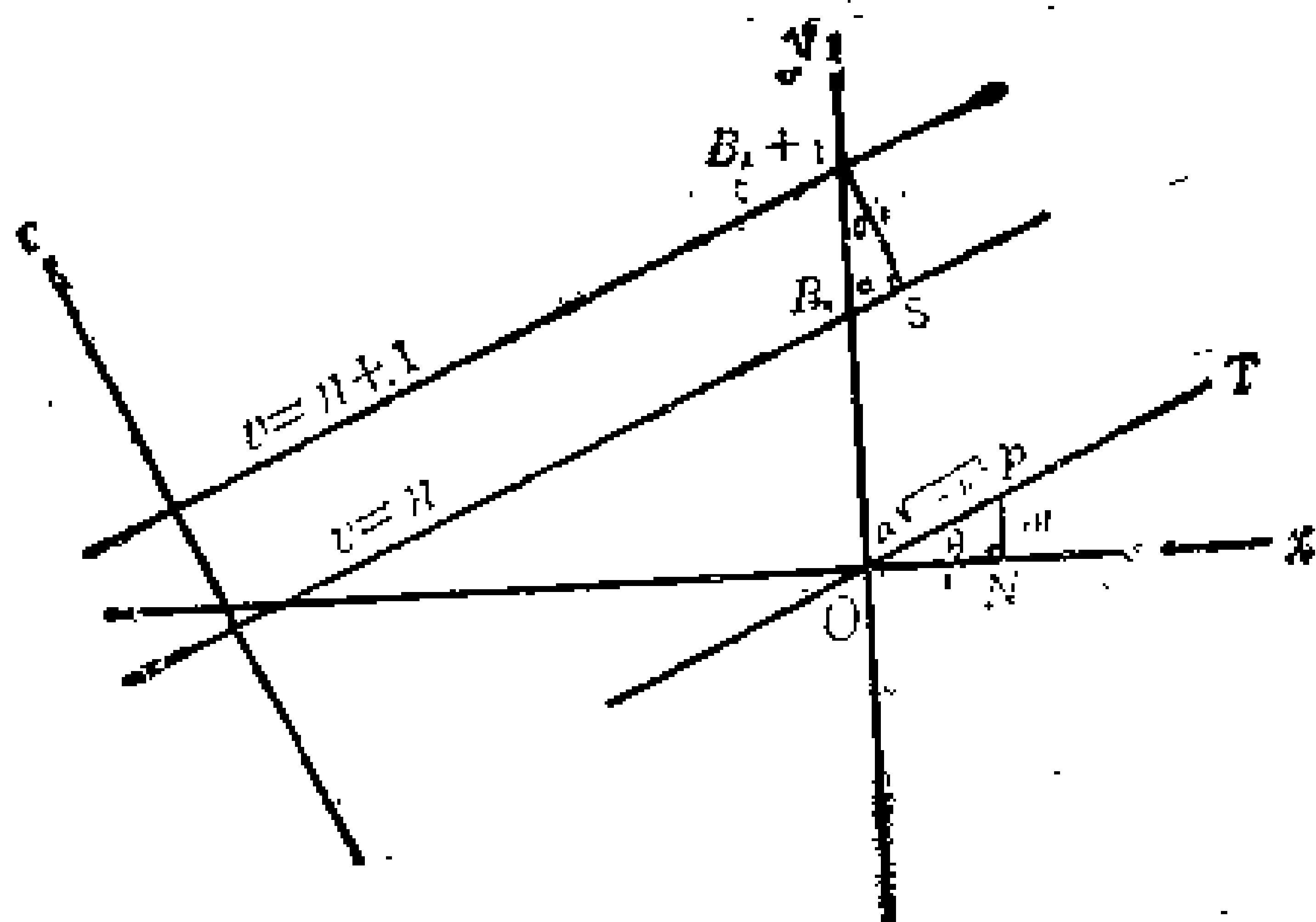


图 96

在原点两侧而得到的（这区间太宽，B_n无法全部跨过）（图97）．若B_n的坐标是（0，k）则格点的直线L_n（L中的$v=n$）的方程为

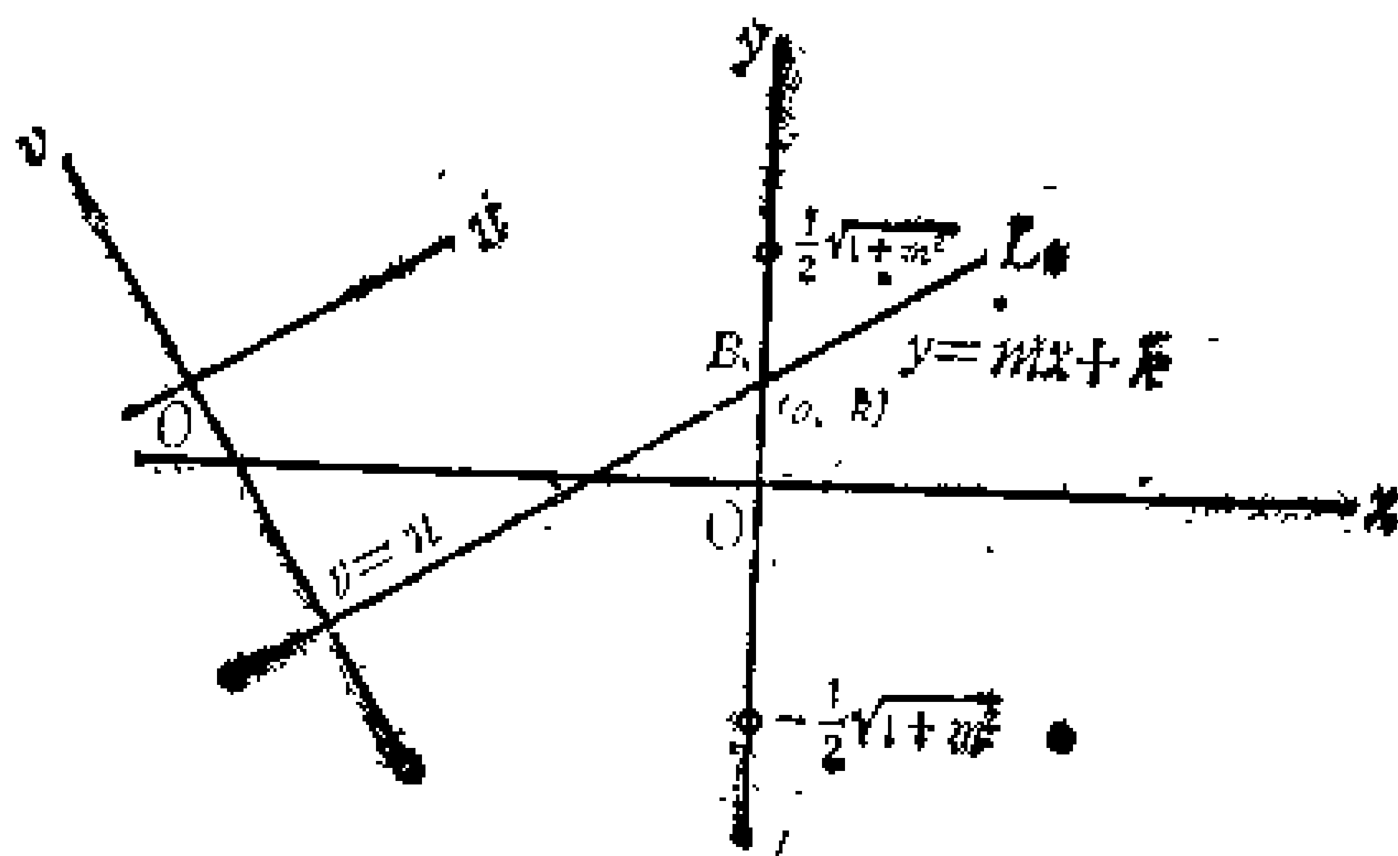


图97

$y=mx+k$，式中$-\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}<k$

$\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}$.，

但在这一点并不能保证L_n与椭圆E相交．不过，通过解方程我们得知

$$y=mx+k,$$
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2y^2,$$
$$b^2x^2+a^2(mx+k)^2=a^2b^2,$$

最后得

$$x=\frac{-mka^2\pm ab\sqrt{b^2+a^2m^2-k^2}}{b^2+a^2m^2}$$

由于E遮住点$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，故有$a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2$，因而有$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\leqslant 4$，进而得知$\frac{1}{b^2}<4$，$\frac{1}{a^2}<4$，这是因为$a$，$b$均不为零的缘故．所以我们有$b^2>\frac{1}{4}$，$a^2>\frac{1}{4}$．结果得

$$k^2\leqslant\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+m^2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+m^2)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{m^2}{4}<b^2+a^2m^2$$

于是根号下的$b^2+a^2m^2-k^2$为正，这表明L_n的确与椭圆E相交．

现在我们来求椭圆E在L_n上截出的线段的长度d.若能证明d至少等于1，那末L_n上按单位距离分布的格点至少有一个会落入E内。

令x_1与x_2表示E与L_n的交点的横坐标。由于L_n的方程是$y=mx+k$，故交点就是(x_1, mx_1+k)，(x_2, mx_2+k).

所以

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(mx_2-mx_1)^2$$
$$=(x_2-x_1)^2(1+m^2)$$

先前已经求解过交点了，我们知道x_1与x_2各为

$$\frac{-mka^2\pm ab\sqrt{b^2+a^2m^2-k^2}}{b^2+a^2m^2}.$$

其差的平方就等于

$$\left[\frac{2ab\sqrt{b^2+a^2m^2-k^2}}{b^2+a^2m^2}\right]^2$$
$$=\frac{4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)}{(b^2+a^2m^2)^2}$$

因此

$$d^2=\frac{4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2)}{(b^2+a^2m^2)^2},$$

$$d^2(b^2+a^2m^2)^2$$
$$=4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2).$$

两端分别减去$(b^2+a^2m^2)^2$得

$$(d^2-1)(b^2+a^2m^2)^2$$

$$=4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2)$$
$$-(b^2+a^2m^2)^2.$$

如果证明了上式右端非负，那末便可得到结论：$d^2-1\geqslant 0$，即$d\geqslant 1$，这就是想要证明的。

由$0\leqslant(a-b)^2$得$2ab\leqslant a^2+b^2$。因为有

$$\boxed{a^2+b^2\leqslant 4a^2b^2}$$

故$2ab\leqslant 4a^2b^2$，从而$1\leqslant 2ab$。所以 $1\leqslant 2ab<a^2+b^2$，因而

$$\boxed{a^2+b^2-1\geqslant 0}$$

然而我们还有$k^2\leqslant(1+m^2)/4$，所以

$$4a^2b^2(b^2+a^2m^2-k^2)(1+m^2)-(b^2+a^2m^2)^2$$
$$\geqslant 4a^2b^2\left(b^2+a^2m^2-\frac{1+m^2}{4}\right)(1+m^2)$$
$$-(b^2+a^2m^2)^2$$
$$=(m^4a^2+b^2)(4a^2b^2-a^2-b^2)+4m^2a^2b^2$$
$$(a^2+b^2-1)$$

上式最末一步的正确性可以直接乘出来加以检验

由上面各不等式得

$$4a^2b^2-a^2-b^2\geqslant 0,\quad a^2+b^2-1\geqslant 0.$$

所以结果是非负的，充分性因此得证。

(b) 必要性

现在假设E总是遮住一个格点，很容易看出E处于标准位置时必定遮住点（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）.

反之，假设椭圆E不覆盖格点．我们作坐标平移，把原点移至点（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$）．这样作的效果就是把格子的基本单位平方格的中心与格点进行了交换（图98）．若某一区域遮住格点（x，y），那末经平移后这个区域就要遮住中心，反之亦然．如果E

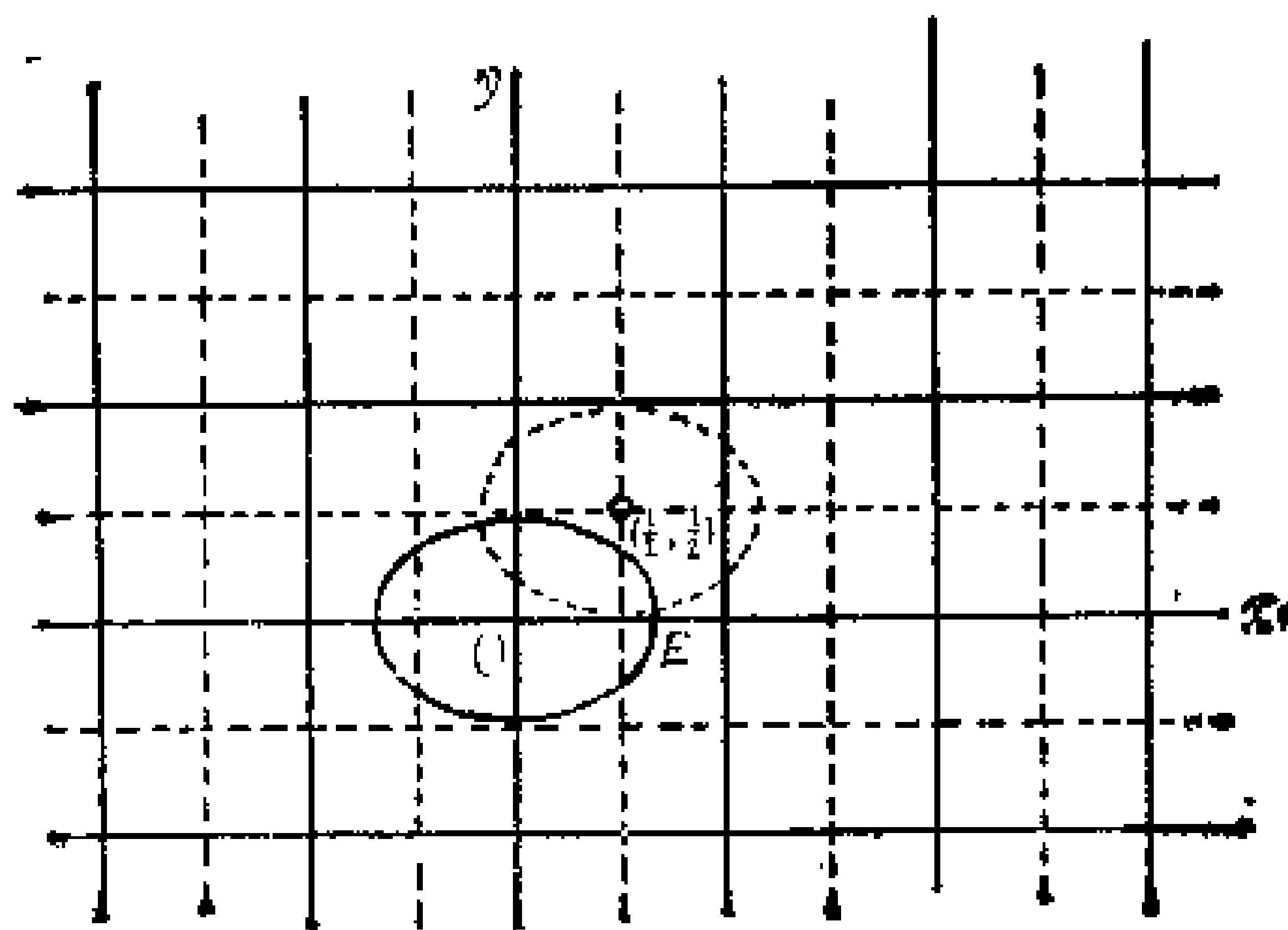


图 98

未能遮住中心（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），那末由于E具有对称性，它也就不能遮住任何单位方格的中心．所以平

移以后E就遮不住任何格点，这与下述给出的性质冲突．E至少总要覆盖单位方格（这时就是中心相同的格子）的一个格点．所以E一定遮住点$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，于是定理得到证明．

九十一、阿基米德三角形

伟大的阿基米德（Archimedes）的一件卓越功绩是算出抛物线弓形（即弦所截下的一部分）的面积．他得出弦AB上的弓形面积是在A，B两点的切线所确定的$\triangle PAB$的面积的$\frac{2}{3}$．PAB这种三角形叫阿基米德三角形（图99）．

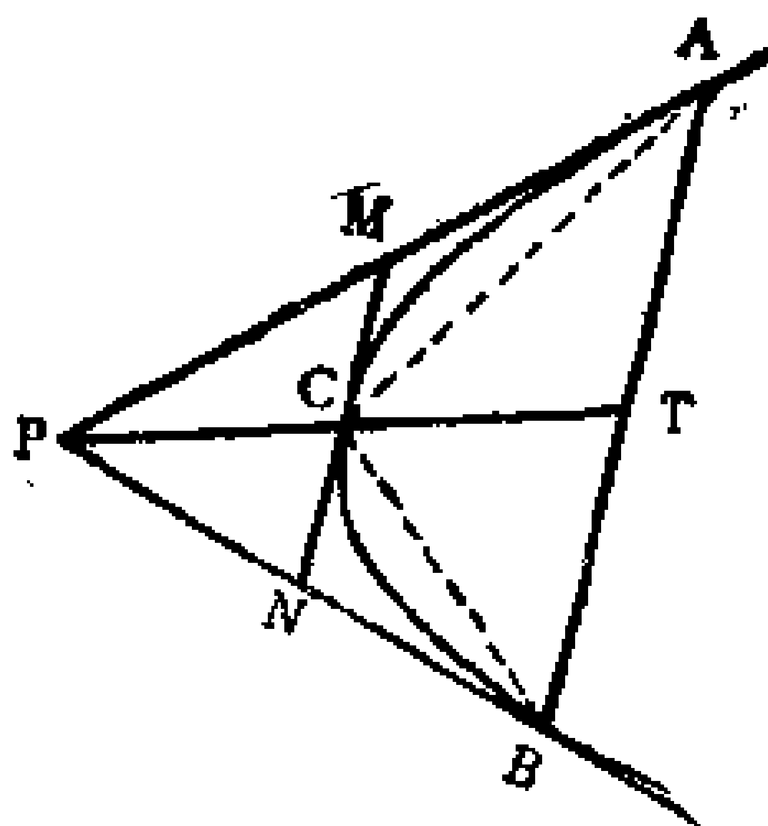


图 99

可证明，以阿基米德三角形中弦的中线PT平行于抛物线的轴，在PT与抛物线的交点C处抛物线的切线MCN平行于弦AB．并且还可以证明M与N分别是PA与PB的中点．因此三角形CAB的底

与$\triangle PAB$的底相同，但高却只有$\triangle PAB$的高的一半，所以$\triangle CAB=\frac{1}{2}\cdot\triangle PAB$. 结果得

抛物线弓形$=\frac{2}{3}\triangle PAB=\frac{4}{3}\triangle CAB$.

已知有一个三角形是三条抛物线的阿基米德三角形，每条抛物线在三角形的（两个）顶点处与三角形的两边相切. 一个阿基米德三角形加上它的三条抛物线所组成的图形有许多有趣的性质（图100）.

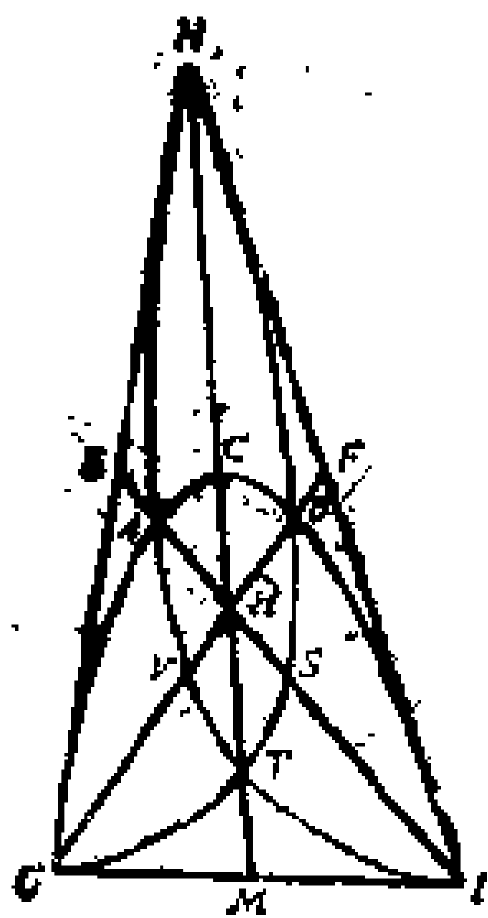


图 100

(i)抛物线互相间总是交于三角形的中线上（比如，NTM就是一条中线）.

(ii)这些交点总是在中线的1/9处（从边上的中点算起）.〔例如，$MT=\frac{1}{9}MN$，即$MT:TN=1:8$〕

(iii)三条抛物线与其间的中线把三角形分成了18份，其中有12部份都是由两条线段与一段弧围成的，另外6份是由一条线段与两段弧围成的．这12份每份面积都一样，等于三角形面积的$\frac{5}{162}$．另外那6份每份面积也一样，等于三角形面积的$\frac{17}{162}$．

(iv)在抛物线的一个交点（例如T)处的两条切线三等分邻边（例如P，Q三等分GI)，如图101.

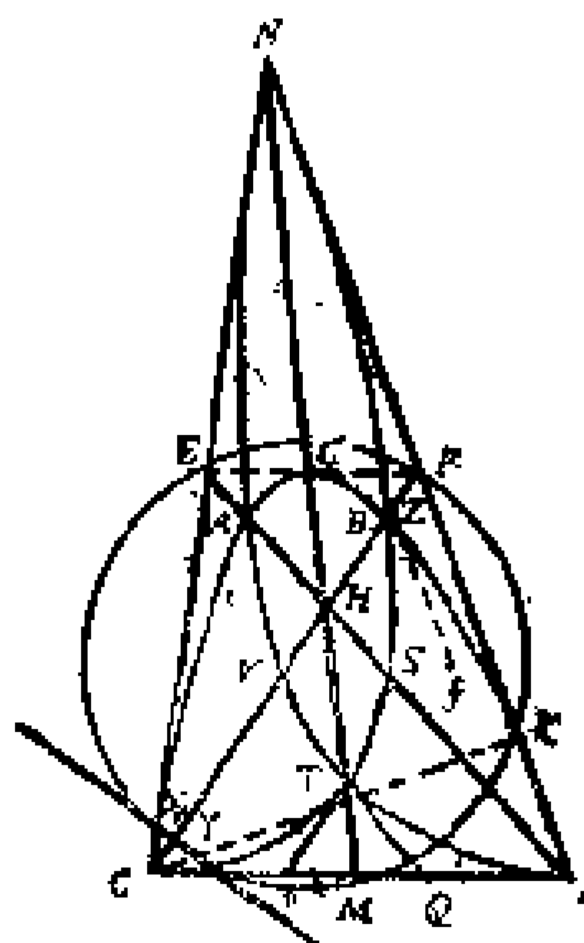


图 101

(v)（经过三边中点的）九点圆与同一顶点引出的中线和高（例如GF与GK）相交于两点（X与Y)，这两点确定的直线与该中线垂直；这也就使得此直线也与（相应的）抛物线垂直，从而平行于准线．其实这条线(XY)就是准线.

(vi)过焦点f平行于三角形非切线边的一条直

线在该边的中线上截下一条线段（ZF），此线段等于中线上顶点(G)到准线的距离(即$GX=ZF$)。

在本节中我们考虑性质(i)，(ii)，以及(iii)的一半，作为本书数学趣谈的结束.

(i)与(ii). 如果证明了把中线MN分成1:8的点W在与边GI相切的两条抛物线上，也就一起证明了这两条性质（图102）. 由于这些抛物线的情况都是等价的，所以我们只考虑过N与I的抛物线. 假设它的方程是$y^2=x$，N与I的坐标分别为(k^2, k)

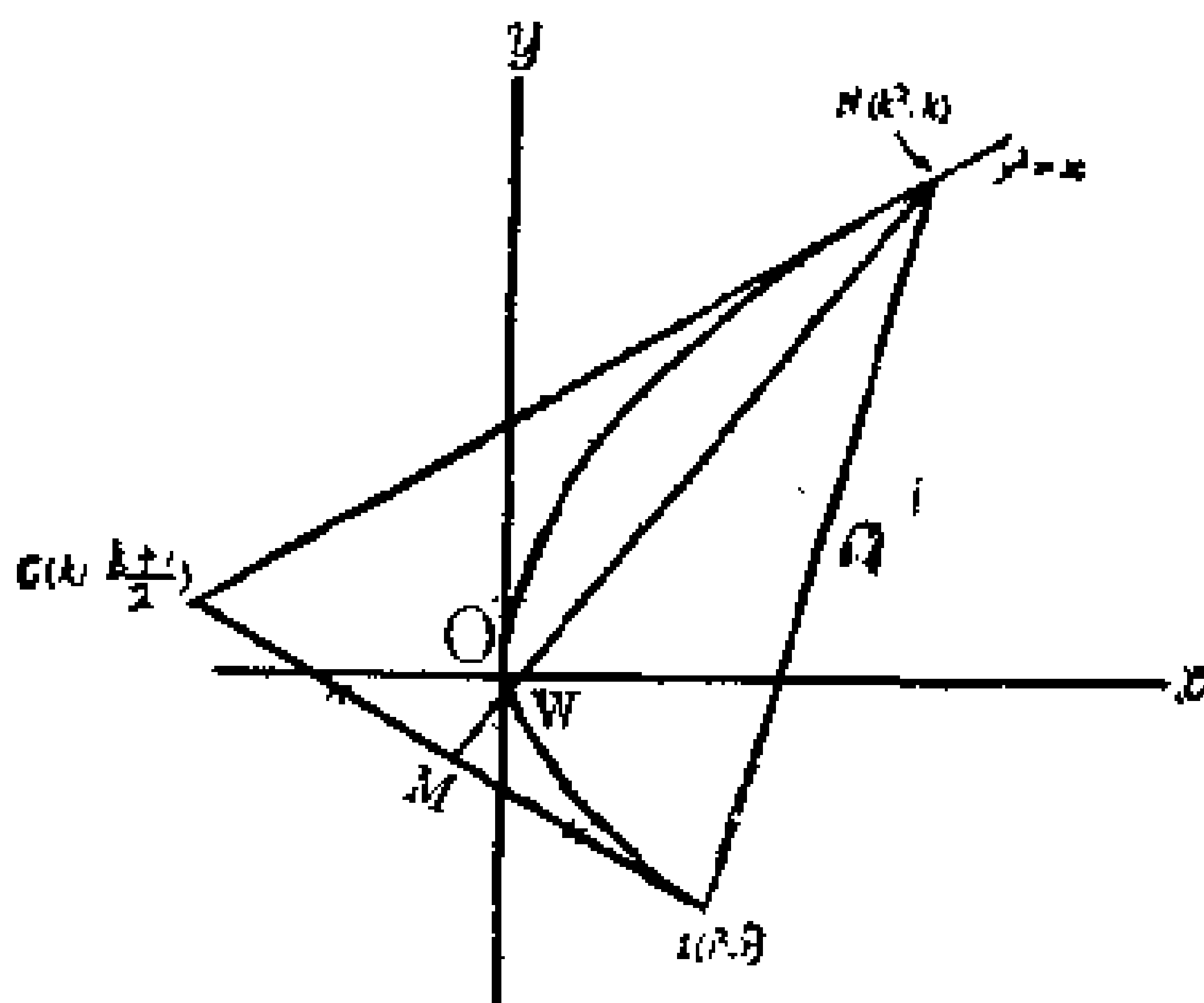


图 102

和(t^2, t). 那末切线GN与GI的方程就是

$$x-2ky+k^2=0, \qquad x-2ty+t^2=0.$$

解出G的坐标为$\left(kt, \dfrac{k+t}{2}\right)$. (顺便提一句，$G$的纵标$(k+t)/2$与$NI$中点的纵标一样，这表明弦$NI$

的中线与抛物线的轴平行。）

GI 的中点M是$\left(\frac{t(k+t)}{2}, \frac{k+3t}{4}\right)$. 按1:8的比例分割$MN$的点是

$$\left(\frac{k^2+8\left(\frac{t(k+t)}{2}\right)}{9}, \frac{k+8\left(\frac{k+3t}{4}\right)}{9}\right),$$

亦即

$$\left(\frac{1}{9}[k^2+4t(k+t)], \frac{1}{9}[k+2(k+3t)]\right).$$

对于此点有

$$y^2=\frac{1}{81}\left[k+2(k+3t)\right]^2=\frac{1}{81}(3k+6t)^2$$

$$=\frac{1}{9}(k+2t)^2=\frac{1}{9}(k^2+4kt+4t^2)$$

$$=\frac{1}{9}\left[k^2+4t(k+t)\right]=x,$$

这表明它在抛物线上.

(iii)形心H三分中线EI与FG. 由于$EA=\frac{1}{9}EI$, 所以$EA=\frac{1}{3}EH$. 同样$FB=\frac{1}{3}FH$.所以AB平行于EF. 前面提到过，EF与过G, I两点的抛物线相切于点C，此点是中线与抛物线的交点.

试回忆一下抛物线的"直径"的性质(图103)：

一组平行弦中点的轨迹是一条直线，名叫直径，抛物线的直径都平行于抛物线的轴；又，直径"端点"处的切线平行于直径所平分的一组弦. 所

以，从抛物线上一点P作出的平行于轴的直线PQ平分一切与P点处切线平行的弦.

我们刚才看到了，弦AB平行于切线ECF，而CO由于是中线的一部分而与抛物线的轴相平行（图104）. 故CO是直径，因而平分所有平行于EF（和AB)的弦. 于是最终得知CO平分弓形ABC的面积. AB是被CO平分的弦之一. 因此OH平分$\triangle ABH$，于

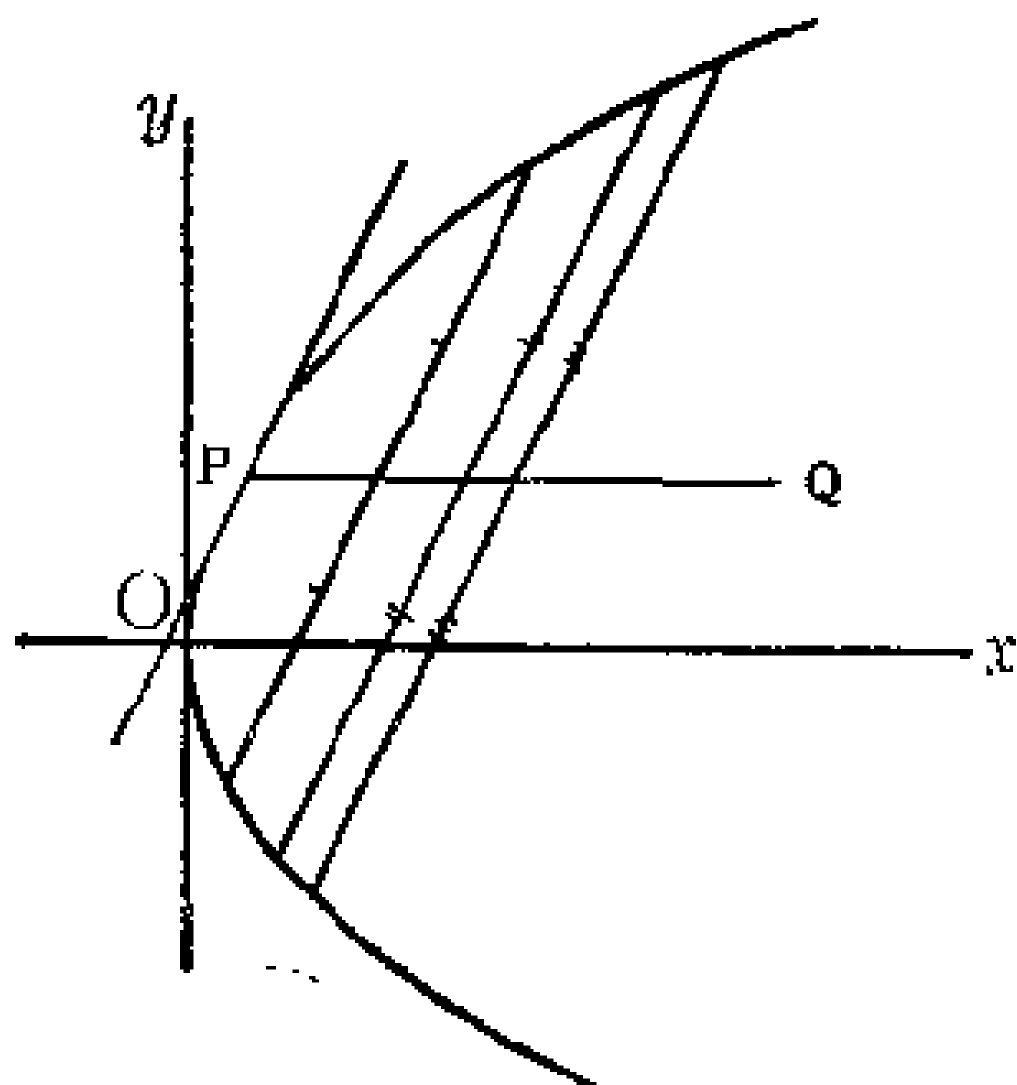


图 103

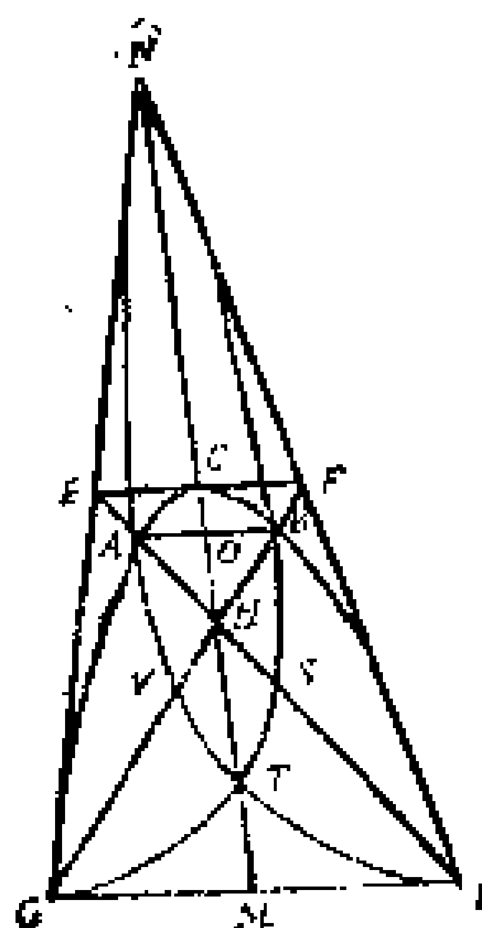


图 104

是CH平分$AHBC$. 所以AHC的面积$=\frac{1}{2}AHBC=\frac{1}{2}\left(弓形\ ABC+\triangle ABH\right)$. 下面计算弓形$ABC$和$\triangle ABH$的面积.

因为EF与AB平行，三角形EFH就与三角形ABH相似，故有

$$\frac{\triangle ABH}{\triangle EFH}=\left(\frac{AH}{EH}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

$$\triangle ABH=\frac{4}{9}\triangle EFH.$$

EF也平行于GI，因而$\triangle EFH$和$\triangle HGI$相似。由于相应边的比为$\frac{1}{2}$，所以

$$\triangle EFH=\frac{1}{4}\triangle HGI.$$

然而由形心H三等分中线MN，根据相似三角形可推知，$\triangle HGI$与$\triangle NGI$的GI边上的高之比也是1∶3，因此$\triangle HGI$是$\triangle NGI$的三分之一。故有

$$\triangle EFH=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\triangle NGI\right)=\frac{1}{12}\triangle NGI,$$

由此得

$$\triangle ABH=\frac{4}{9}\triangle EFH=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{12}\triangle NGI\right)$$
$$=\frac{1}{27}\triangle NGI.$$

末了，弓形$ABC=\frac{4}{3}\triangle ABC$。因为$A$与$B$按1∶2的比例分割$EH$与$FH$，所以平行线$EF$与$AB$之间的距离，即$\triangle ABC$的底$AB$上的高，是$\triangle ABH$中$H$到$AB$的高的一半。因此$\triangle ABC$是$\triangle ABH$的一半，故有

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\triangle ABH=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{27}\triangle NGI\right)$$
$$=\frac{1}{54}\triangle NGI.$$

因此

$$弓形\ ABC=\frac{4}{3}\triangle ABC=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{54}\triangle NGI\right)$$

$$=\frac{2}{81}\triangle NGI.$$

于是最终得

$$区域ACH=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{81}\triangle NGI+\frac{1}{27}\triangle NGI\right)$$

$$=\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{54}\right)\triangle NGI$$

$$=\frac{5}{162}\triangle NGI.$$

练　习

有关各题及其解的线索注于题后

1. 客车比货车快x倍，客车同向走时赶上货车所花时间是反向走时它赶上货车所花时间的x倍。求x。(AMM，1960、p．475，问题E1386.)

2. 已知两圆，从各圆心向另一圆作切线（图105）．证明在两圆上截出的弦相等。(AMM，1933，p．456.)

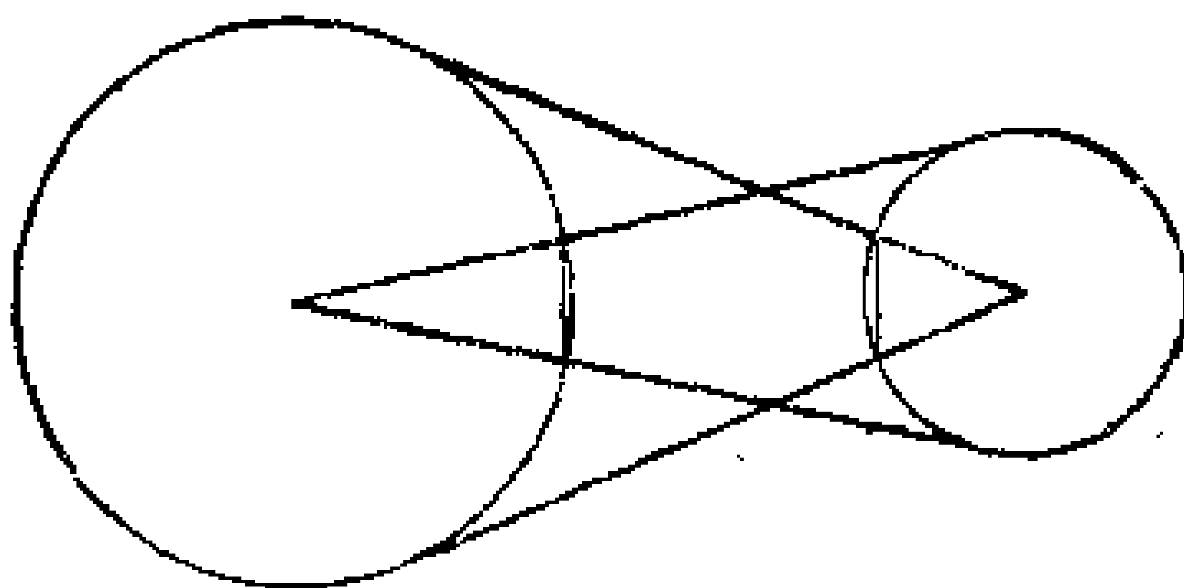


图　105

3. 求各位数字和不能整除各位数字立方和的最小自然数．(AMM，1948，p．579，问题E802.)

4. 具有铅直轴（即与y轴平行的轴）的抛物线上有三点A，B，C．A点处切线斜率是m_A，弦AB的斜率是m_{AB}，等等．试证下列奇特性质：

$$m_A = m_{AB} + m_{AC} - m_{BC}.$$

(AMM，1965，p．667，问题E1701.)

5.试证3×3幻方的"幻方常数"恒为3的倍数。(AMM，1897，p.189.)

6.有个人得到一张多少多少元多少多少分的支票，兑现时出纳员把应付的分数付成了元，而把元数付成了分．后来他用去了3.50元后才发觉手头的钱是他支票上的钱数的两倍．请问支票面额是多少？(AMM，1941，p.212，问题E430.)

7.证明任意四面体中必然至少有一个顶点，在该处的面角均为锐角．(AMM，1935，p．453，问题E141.)

8.已知$f(x)$为一整系数多项式，a为奇数，b为偶数，且$f(a)$与$f(b)$均为奇数，证明$f(x)=0$无整数根．(AMM，1960，p.760，未解决.)

9.设P为简单多面体，P无任何顶点刚好有三条棱相交.试证P至少有八个面是三角形(AMM，1951，p.421，问题E945.)

10.设a与n都是自然数，$n>1$，证明任何幂a^n都是a个连续奇数之和.(AMM，1947，p.165，问题E726.)

11.一条定长弦在已知圆内滑动，弦的端点垂直投影到圆的一条固定直径上．端点在直径上的投影与弦的中点组成一个三角形．证明这个三角形是等腰三角形，且其形状不随弦在圆内的滑动而变

化.(AMM, 1936, p.186,问题E171.)

12.甲报出一个01到99之间的二位数，乙把这个数的数字反过来，再加上数字之和，然后报给甲.甲重报此结果，然后照先前那样作下去.所有出现的数都要按模100来化简，使得所报之数只是二位数.要想乙在某个时候报出00，试问甲第一次报什么数.(AMM, 1949, p.105, 问题E816.)

13.证明5个偶数数字或奇数数字，无论怎样排列都排不出一个平方数.(AMM, 1937, p.248. 问题E232.)

14.过两个定点作变动的圆与一定圆相交.证明定圆与变圆的所有公共弦共点.(AMM, 1895, p.17, 问题32.)

15.试求一年中出现“13号是星期五”的最小和最大数目.(AMM, 1963, p.759, 问题E1541.)

16.试求两个自然数，使其和为其积的因子.(AMM, 1961. p.804, 问题E1452.)

17.已知一个圆心为O的圆，以及不在圆周上的一点P.过P作一直线交此圆于两点，过这两点作圆的切线.这两条切线与过P点垂直于OP的直线相交于C, D.证明P为CD的中点.(Mathematics News Letter (Mathematics Magazine的前身), 1933-34, p.170, 问题52.)

18.证明，对$n=1, 2, 3, \cdots$有

$(1^5+2^5+\cdots+n^5)+(1^7+2^7+\cdots+n^7)=2(1+2+\cdots+n)^4$. (AMM, 1915，p. 99，问题419.)

19.证明：从三角形的三条高的垂足向另外两边作垂线，所得的六个垂足共圆．(这叫三角形的泰勒Taylor圆)（NMM, 1943-44，p. 40，问题458.)

20.证明：如果知道一个自然数的全部因子之积，那末可以唯一地确定该自然数．(MM, 1964, p.57，问题518.)

21.证明：如果在三角形中有两条中线互相垂直，那末三条中线是一直角三角形的边，并且斜边就是第三条中线．(AMM, 1902，p. 164，问题177.)

22.设f_n是一个数列的第n项，定义成$f_n=-f_{n-1}-2f_{n-2}$，$f_1=1$，$f_2=-1$．试证$2^{n+1}-7f^2_{n-1}$永远是个完全平方数．(AMM, 1973, p. 696，问题E2367.)

23.农夫琼斯有一辆方轮车，不过这也适合他的需要了，因为他会用这辆车走搓板公路而不颠簸．假定轮子不滑动，试描述搓板公路路面的形状．(AMM, 1965, p.82，问题E1668.)

24.试求r的一切值，使得没有任何$n!$末尾正

好是 r 个零.(MM, 1953, p.54; 问题158.)

25.设一个圆的圆心 C 在等轴双曲线上，且此圆又通过双曲线上的一点 P，这点是 C 关于原点的对称点，证明圆与双曲线的其余三个交点永远组成一个等边三角形（图106））．(NMM, 1943—44, p. 247, 问题531.)

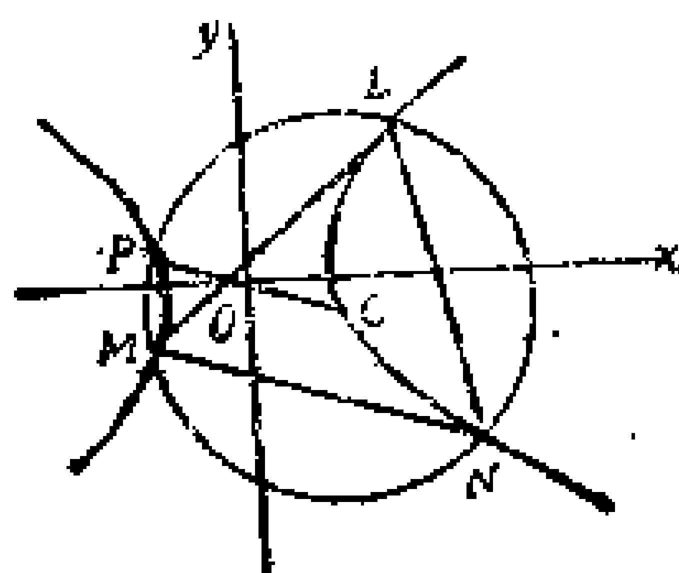


图 106

习题分类索引

I 代数，算术，数论，数列，概率

Ⅱ　组合论，组合几何（极大与极小）

Ⅱ　几何（极大与极小）

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学瑰宝　第二辑
作者＝
页数＝２８６
ＳＳ号＝０
出版日期＝